



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

TOPICS IN MATHEMATICAL SYSTEM THEORY

R. E. KALMAN
Stanford University

P. L. FALB
Brown University

M. A. ARBIB
Stanford University

MC GRAW-HILL BOOK COMPANY

NEW YORK • SAN FRANCISCO • ST. LOUIS • TORONTO • LONDON • SYDNEY

1969

Р. КАЛМАН, П. ФАЛБ, М. АРБИБ

ОЧЕРКИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Перевод с английского

Э. Л. НАППЕЛЬБАУМА

Под редакцией

Я. З. ЦЫПКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1971

Книга отражает современное состояние математической теории систем — нового и весьма перспективного направления классической теории управления. Она охватывает элементарную теорию автоматического управления, основы теории оптимального управления, теорию конечных автоматов и новейшую алгебраическую теорию линейных систем. Изложение отличается новыми оригинальными результатами, необычными аналогиями и четкостью.

Авторы — известные математики, а Р. Калмана по праву можно считать одним из основателей современной теории систем.

Книга рассчитана на математиков и специалистов по теории управления. Методические достоинства книги делают ее весьма ценной для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-4-1

30-70

Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб

ОЧЕРКИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Редактор *А. Попов*

Художник *Н. Власик*

Художественный редактор *В. Шаповалов*

Технический редактор *Е. Потапенкова*

Корректор *Т. Лаврова*

Сдано в набор 5/VI 1970 г. Подписано к печати 12/I 1971 г.
12,50 бум. л. 25,00 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 23,30. Изд. № 1/5450.

Бумага кн. журн. 60×90^{1/16} м.
Цена 1 р. 82 к. Зак. 693

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория систем — это настолько широкое и неопределенное понятие, что даже при весьма скромном воображении под него можно подвести (как это часто и делается в современной литературе) почти все, что составляет предмет изучения естественных и гуманитарных наук. Несколько менее широкое и чуть-чуть более определенное понятие представляет собой *математическая теория систем*, которой и посвящена настоящая книга.

Написанная тремя крупными учеными, принимавшими непосредственное участие в формировании математической теории систем как самостоятельного научного направления, эта книга дает обзор важных достижений в данной области.

Бурное развитие математической теории систем делает безнадежной попытку систематического ее изложения. Систематизация требует времени, в течение которого многие результаты стареют и исчезают или заменяются новыми. Поэтому чрезвычайно важно иметь пусть моментальный снимок, но снимок, сделанный в наши дни, который передавал бы основные черты современного состояния математической теории систем.

Таким снимком, выполненным руками мастеров, и является книга Р. Калмана, П. Фалба и М. Арбиба. Характерная особенность этой книги состоит в том, что в ней изложены не только результаты собственных исследований авторов, но и их (порой различные) точки зрения на уже вошедшие в обиход понятия и результаты.

Книга состоит из введения и четырех частей.

Введение представляет собой своеобразный путеводитель по книге, знакомящий читателя с основными понятиями и определениями и позволяющий составить представление о содержании всех частей книги.

Первая часть (автор Р. Калман) посвящена изложению элементарной теории автоматического управления с современной точки зрения.

Во второй части (П. Фалб) рассматриваются основы современной теории оптимального управления.

Третья часть (М. Арбиб) посвящена теории автоматов.

В четвертой части (Р. Калман), завершающей книгу, изложена новейшая алгебраическая теория линейных систем. Об этой теории следует кратко сказать. Процесс алгебраизации уже давно происходит в теории линейных систем. Примером могут

служить преобразование Лапласа, преобразования Фурье, как непрерывные, так и дискретные, различного рода интегральные преобразования. Изучение внутренней алгебраической структуры линейных систем, представленное в четвертой части книги, позволяет связать между собой теории конечных автоматов, импульсных систем и непрерывных систем.

Перечисленные выше четыре части книги независимы друг от друга и могут изучаться отдельно. Это обстоятельство, возможно, натолкнет на мысль о том, что книга Р. Калмана, П. Фалба и М. Арбиба не монография, а просто сборник их работ. Быть может, это и так. Но в любом случае она отличается от многих книг по теории управления и теории систем новыми оригинальными результатами, чрезвычайно интересными взглядами на известные результаты, необычными аналогиями, строгостью и четкостью изложения.

Книга представит интерес и будет полезна широкому кругу читателей, от студентов до научных работников. Изучение книги требует определенных усилий. Но тот, кто затратит их, окажется в центре событий, происходящих сейчас в теории систем.

Я. Цыпкин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Детище трех отцов, обязанное своим появлением стечению обстоятельств, эта книга не претендует на систематичность. Напротив, в ней мы стремились представить математическую теорию систем в ее истинном нынешнем свете — как увлекательную, интригующую, волнующую, трудную, запутанную, многообещающую и в значительной степени неизведанную область знаний, уже сегодня играющую важную роль, а в будущем обещающую новые еще более перспективные открытия.

Ограниченность объема книги, сжатые сроки работы и повседневная занятость исследователей полностью исключают возможность систематического описания того переворота, который произошел в рассматриваемой области в конце пятидесятых и начале шестидесятых годов. Такого рассказа не следует ожидать в ближайшем будущем ни от нас, ни от кого-либо другого. Поэтому мы попытались выделить лишь четыре, по-видимому, основные идеи, связанные с понятиями *состояния*, *управления*, *оптимизации* и *реализации*. Мы пытались также донести до читателя очень важную для нас мысль о том, что теория систем представляет собой не просто одну из ветвей прикладной математики, а является источником задач и интуитивных представлений, в которых *нетривиальным образом переплетаются математический анализ и алгебра*. В то же время многие важные вопросы, такие, как проблема устойчивости, качественная теория дифференциальных уравнений, алгебраическая лингвистика, прикладная теория управления, теория переключающихся схем, теория автоматов на базе математической логики и т. д. и т. п., здесь затронуты лишь вскользь или вовсе не упомянуты.

Каждая из четырех частей книги независимо написана одним из авторов, как это и видно из оглавления. Мы не предпринимали никаких попыток устранить повторы (они есть, и мы надеемся, что они будут полезными читателю); мы не стремились к единообразной системе обозначений (таковую просто невозможно установить без того, чтобы не ввести читателя в заблуждение относительно существующего разнобоя в литературе), и, наконец, при редактировании книги были сохранены следы индивидуальности стиля каждого из авторов.

Мы надеемся, что книга будет полезной для самостоятельного изучения, особенно тем читателям, у которых нет личного контакта с одним из «центров» в данной области. Материал расположен так, что книгу можно использовать для семинаров или для семестровых или полусеместровых спецкурсов по оптимизации, теории автоматов или алгебраической теории линейных систем. Что же касается научных работников или аспирантов, то они найдут здесь много новых отправных точек для будущих исследований. Выбор материала диктовался лишь личными интересами авторов (начиная с 1965 г.) и потребностями изложения. Основное содержание книги было апробировано на семинарах и специальных лекциях.

Ядром книги служат лекции, прочитанные авторами в 1965 г. в Станфордском университете во время летней школы Американского общества распространения технических знаний и Национальной администрации по авионавигации и космическим исследованиям. Различные части книги написаны в разное время. Вторая часть была завершена П. Фалбом в основном к весне 1966 г. и, естественно, не вполне отражает нынешнюю точку зрения автора. Гораздо позже написаны § 3.6 и приложение 4.А этой части. Изложение теории автоматов (М. Арбиб) было готово уже в 1965 г. и с тех пор лишь незначительно переработано. Первая часть (Р. Калман) была написана в 1966 г. и пересмотрена в 1967 г., но ее содержание было известно в научных кругах уже в самом начале шестидесятых годов. Основу материала четвертой части составляют исследования, выполненные в 1965 г., но окончательный вариант был завершён лишь в конце 1967 г.

Всякое мероприятие подобной сложности нельзя осуществить без помощи со стороны, и в нашем случае нам помогали многие. Прежде всего мы хотели бы выразить нашу искреннюю признательность за постоянную и всестороннюю поддержку правительству Соединенных Штатов, и в частности Управлению научных исследований ВВС США, а также Национальной администрации по авионавигации и космическим исследованиям. Мы благодарны проф. М. Анликеру — организатору летней школы в 1965 г., который постоянно вдохновлял нас при завершении работы над рукописью. Р. Калман весьма обязан руководителям университетов Миннесоты (1965), Нью-Мехико (1966) и Лондонского королевского колледжа (1967) за приглашения прочесть специальный курс лекций и, конечно же, руководителям Станфордского университета, в котором часть материала читалась (1965—1968) на старших курсах. П. Фалб выражает благодарность Г. Кушнеру, Э. Джильберту и Д. Клейнману за полезные обсуждения. М. Арбиб глубоко признателен Р. Свенсон за поддержку его работ, проф. Дж. Весткотту из Лондонского королевского колледжа и проф. Дж. Блатту из Университета Нового Южного Уэльса (Авст-

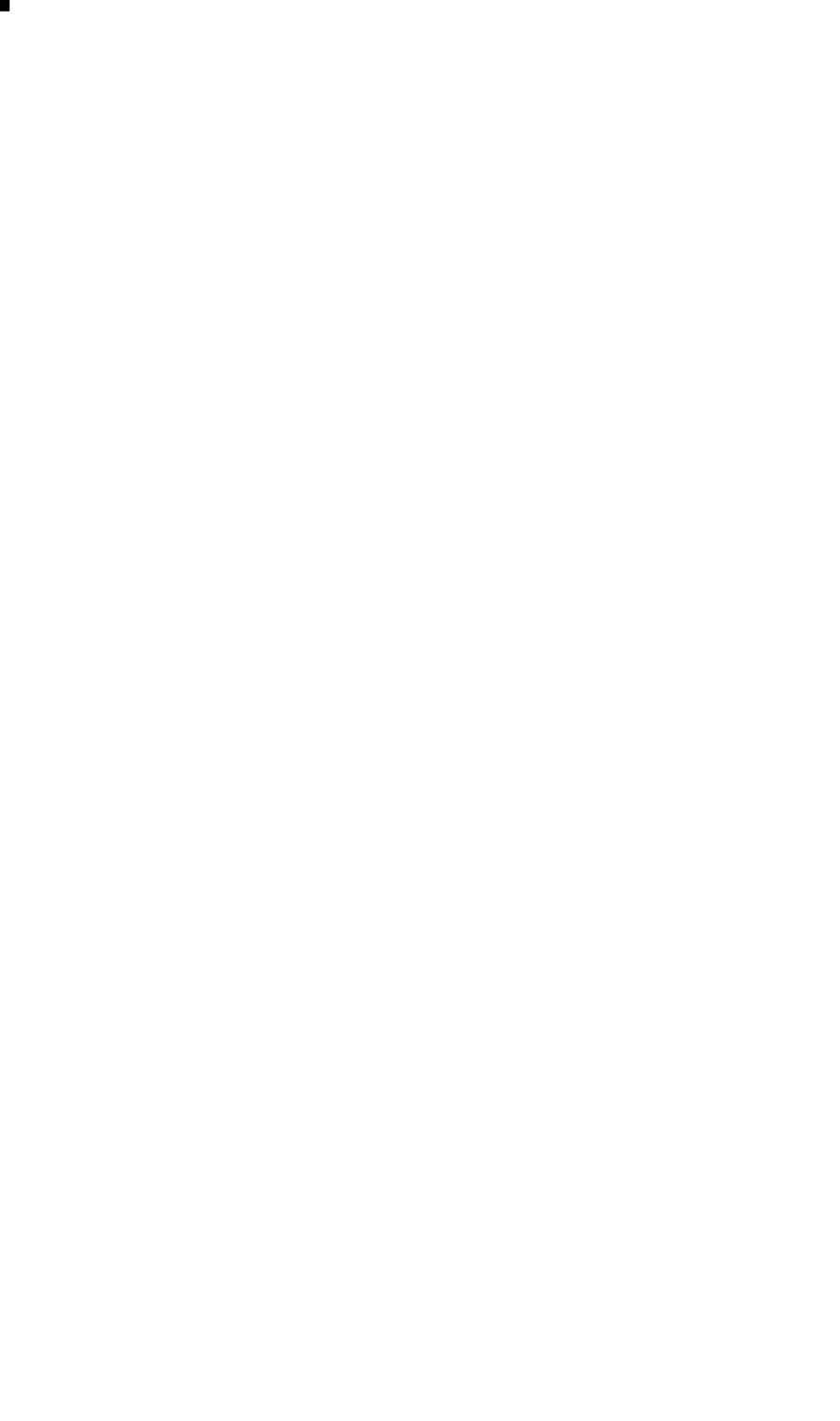
ралия) за приглашение прочесть лекции в период 1964—1965 гг., когда и формировался в основном материал третьей части книги. Каждый из нас имел важные беседы с проф. Х. Зейгером, влияние которого ощущается во многих местах книги. Мы обязаны д-ру П. Форру, прочитавшему большую часть рукописи и предложившему внести некоторые важные исправления. Мы глубоко благодарны также миссис М. Ньюком, Дж. Парсонсу, К. Нолан и миссис К. Омура за квалифицированную помощь. Мы также очень признательны издателям за их сотрудничество, полное юмора и понимания.

Наконец, все лавры и претензии, связанные с замыслом этой книги, возлагаются на издателей, уговоривших П. Фалба и М. Арбиба уговорить Р. Калмана взяться совместно за столь нелегкое предприятие, в то время как все упреки по поводу неверных ссылок на литературу, противоречивых обозначений, опечаток и подобного рода недочетов следует адресовать одному лишь Р. Калману, взявшему на себя труд общего редактирования.

Р. Калман,

П. Фалб,

М. Арбиб



ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб

1 В помощь читателю

Чтобы дать некое единое представление об увлекательной, но неупорядоченной новой области теории систем, мы посвящаем эту главу общему обзору различных взаимосвязанных вопросов, рассмотренных в этой книге. Принципиальной основой для последующего изложения служит содержание § 1.1, в котором дается довольно длинное формальное определение системы (точнее, динамической системы) и поясняется используемая в дальнейшем терминология. Если не считать терминологической общности, все четыре части книги являются автономными. Первая часть (гл. 2) очень проста и предназначена для того, чтобы подготовить читателя к каждой из трех узких тем книги: проблеме оптимизации (вторая часть, гл. 3—5), проблеме описания системы и ее структуры (третья часть, гл. 6—9) и современной теории линейных систем (четвертая часть, гл. 10).

1.1 Системы и состояния

В этой книге мы будем рассматривать теорию систем как теорию динамических взаимосвязей. Такие термины, как «системы», «системные подходы», «системные понятия» и «системотехника», используются в настоящее время настолько широко и свободно, что это приводит лишь к дополнительной путанице. Однако для нас *система*, а точнее *динамическая система* — это строгое математическое понятие. Поэтому теория систем в основном, хотя и не полностью, является областью математики.

Прежде чем перейти к формальному определению понятия динамической системы, рассмотрим вкратце интуитивные представления, с которыми оно связано. Мы рассматриваем систему как структуру, в которую в определенные моменты времени вводится нечто (вещество, энергия или информация) и из которой в какие-то моменты времени выводится что-то. Например, мы можем представить себе систему как электрическую цепь, входным воздей-

ствием для которой служит напряжение, а выходной величиной — показание прибора, измеряющего силу тока. Или мы можем думать о системе, как о системе переключающихся элементов, входными воздействиями для которой являются включения или выключения нескольких входных переключателей, а выходной величиной — картина, образованная горящими и погашенными лампочками. В первом из этих примеров можно считать, что события происходят непрерывно во времени (поскольку обычно электрические сигналы меняются непрерывно во времени), а во втором естественнее предполагать, что время дискретно (скажем, выключатели можно переключать лишь каждые пять секунд).

И в том и в другом случае наше понятие системы Σ включает вспомогательное множество моментов времени T . В каждый момент времени $t \in T$ система Σ получает некоторое входное воздействие $u(t)$ и порождает некоторую выходную величину $y(t)$. Будем предполагать, что значения входных воздействий выбираются из некоторого фиксированного множества U , т. е. в любой момент времени t символ $u(t)$ должен принадлежать U . В самом общем случае отрезок входного воздействия системы *не может* быть совершенно произвольной функцией $\omega: (t_1, t_2) \rightarrow U$, но должен принадлежать некоторому узкому классу Ω . Выбор Ω может диктоваться физическими соображениями, но чаще всего он определяется математическими потребностями. Что касается выходных величин, то любое мгновенное значение выходной величины $y(t)$ также принадлежит некоторому фиксированному множеству Y , и обычно на «допустимые» отрезки выходных величин $\gamma: (t_2, t_3) \rightarrow Y$ накладываются лишь довольно слабые ограничения.

Заметим, что одного знания текущего значения входного воздействия $u(t)$ может оказаться недостаточным для предсказания выходной величины $y(t)$. Предыдущие входные воздействия, подававшиеся на систему, могли изменить Σ (например, из-за накопления энергии в первом приведенном примере или из-за срабатывания некоторого внутреннего переключателя во втором) настолько, что это приведет к изменению выходной величины. Другими словами, в общем случае значение выходной величины системы Σ зависит как от текущего значения входного воздействия, так и от предыстории этого воздействия. Лучше всего было бы не делать специальных различий между текущим и предшествующим входным воздействием системы. Поэтому мы будем говорить, что текущее значение выходной величины системы Σ зависит от *состояния* системы Σ , и определим чисто интуитивно текущее состояние системы Σ как такую часть настоящего и прошлого системы Σ , которая необходима для определения настоящих и будущих значений выходной величины. Другими словами, мы рассматриваем состояние системы Σ как некоторую (внутреннюю) характеристику системы Σ , значение которой в настоящий момент

времени определяет текущее значение выходной величины и оказывает влияние на ее будущее. И если рассуждать совсем упрощенно, то состояние можно рассматривать как своего рода хранилище информации, или запоминающее устройство, или накопитель прецедентов. При этом нам нужно, конечно, потребовать, чтобы множество внутренних состояний системы Σ было достаточно богатым для того, чтобы вместить всю информацию о предыстории системы Σ , необходимой для предсказания влияния прошлого на будущее. Однако мы не станем требовать, чтобы состояние содержало лишь *минимум* такой информации, хотя, конечно, подобное требование является удобным упрощающим предположением.

Для того чтобы заслужить название «динамической», система Σ должна обладать еще одним свойством. Знание состояния $x(t_1)$ и отрезка входного воздействия $\omega = \omega(t_1, t_2]$ должно быть необходимым и достаточным условием, позволяющим определить¹⁾ состояние $x(t_2) = \varphi(t_2; t_1, x(t_1), \omega)$ каждый раз, когда $t_1 < t_2$. Заметим, что в связи с этим придется потребовать, чтобы множество моментов времени T было упорядоченным, т. е. чтобы в нем было определено направление времени. Обычно упорядоченность множества T выбирается так, чтобы прошлое предшествовало будущему. Заметим также, что введенное понятие «динамической» системы²⁾, грубо говоря, совпадает с понятием «причинной» системы в том смысле, что прошлое влияет на будущее, но не наоборот. Короче говоря, математическое понятие динамической системы служит для описания потока причинно-следственных связей из прошлого в будущее.

Теперь мы подготовлены к формальному определению.

(1.1) Определение. Динамической системой Σ называется сложное математическое понятие, определяемое следующими аксиомами.

(а) Заданы множество моментов времени T , множество состояний X , множество мгновенных значений входных воздействий U , множество допустимых входных воздействий $\Omega = \{\omega: T \rightarrow U\}$, множество мгновенных значений выходных величин Y и множество выходных величин

$$\Gamma = \{\gamma: T \rightarrow Y\}.$$

(б) (Направление времени.) Множество T есть некоторое упорядоченное подмножество множества вещественных чисел.

¹⁾ Мы не собираемся рассматривать здесь вероятностные динамические системы (условные марковские процессы), у которых текущее состояние $x(t_1)$ и входное воздействие ω определяют не $x(t_2)$, а лишь его вероятностное распределение $\text{Pr}(t_2; t_1, x(t_1), \omega)$.

²⁾ Некоторые авторы предпочитают неологизм «неупреждающая», который, с нашей точки зрения, несет тот же смысл, что и прилагательное «динамическая».

(с) Множество входных воздействий Ω удовлетворяет следующим условиям:

- 1) (Нетривиальность.) Множество Ω непусто.
- 2) (Сочленение входных воздействий.) Назовем *отрезком входного воздействия* $\omega_{(t_1, t_2]}$ для $\omega \in \Omega$ сужение ω на $(t_1, t_2] \cap T$. Тогда если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $t_1 < t_2 < t_3$, то найдется такое $\omega'' \in \Omega$, что $\omega''_{(t_1, t_2]} = \omega_{(t_1, t_2]}$ и $\omega''_{(t_2, t_3]} = \omega'_{(t_2, t_3]}$.

(d) Существует *переходная функция состояния*

$$\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X,$$

значениями которой служат состояния $x(t) = \varphi(t; \tau, x, \omega) \in X$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в *начальный момент времени* $\tau \in T$ она была в *начальном состоянии* $x = x(\tau) \in X$ и если на нее действовало *входное воздействие* $\omega \in \Omega$. Функция φ обладает следующими свойствами:

- 1) (Направление времени.) Функция φ определена для всех $t \geq \tau$ и не обязательно определена для всех $t < \tau$ ¹⁾.
- 2) (Согласованность.) Равенство $\varphi(t; t, x, \omega) = x$ выполняется при любых $t \in T$, любых $x \in X$ и любых $\omega \in \Omega$.
- 3) (Полугрупповое свойство.) Для любых $t_1 < t_2 < t_3$ и любых $x \in X$ и $\omega \in \Omega$ имеем

$$\varphi(t_3; t_1, x, \omega) = \varphi(t_3; t_2, \varphi(t_2; t_1, x, \omega), \omega).$$

- 4) (Причинность.) Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega_{(\tau, t]} = \omega'_{(\tau, t]}$, то

$$\varphi(t; \tau, x, \omega) = \varphi(t; \tau, x, \omega').$$

(e) Задано *выходное отображение* $\eta: T \times X \rightarrow Y$, определяющее выходные величины $y(t) = \eta(t, x(t))$. Отображение $(\tau, t] \rightarrow Y$, задаваемое соотношением $\sigma \mapsto \eta(\sigma, \varphi(\sigma; \tau, x, \omega))$, $\sigma \in (\tau, t]$ ²⁾, называется *отрезком выходной величины*, т. е. сужением $\gamma_{(\tau, t]}$ некоторого $\gamma \in \Gamma$ на $(\tau, t]$.

Говоря о тех или иных объектах, введенных в этом формальном определении (1.1), общепринято и удобно пользоваться более выразительной терминологией. Наиболее распространены следующие термины. Пару (τ, x) , где $\tau \in T$ и $x \in X$, называют *событием* (или *фазой*) системы Σ , а множество $T \times X$ — *пространством событий* (или *фазовым пространством*) системы Σ . (Иногда, особенно в физике, фазовым пространством называют и само пространство состояний, но такая терминология устарела и вносит путаницу.) Переходную функцию состояний φ (или ее график в пространстве событий) называют различными более или менее эквивалентными терминами: *траекторией*, *движением*, *орбитой*, *поток*, *решением* (обыкновенного дифференциального уравнения),

¹⁾ Таким образом, обозначение $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ не вполне корректно.

²⁾ Символ $a \mapsto b$ означает, что отображение $A \rightarrow B$ ставит в соответствие элементу $a \in A$ элемент $b \in B$.

кривой решения и т. д. Мы будем также говорить, что входное воздействие, или управление ω , переносит, переводит, изменяет, преобразует состояние x (или событие (τ, x)) в состояние $\varphi(t; \tau, x, \omega)$ (или в событие $(t, \varphi(t; \tau, x, \omega))$). Говоря о движении системы, мы будем обычно иметь в виду функцию состояний φ .

Назовем систему Σ свободной, если множество Ω содержит лишь один элемент. Этот случай соответствует ситуации, в которой Σ изолирована от входных воздействий и единственным воздействием является сама «окружающая среда». Например, солнечная система в той мере, в какой ее описывают уравнения небесной механики, является свободной системой, поскольку единственные силы, действующие в системе, определяются гравитацией и, следовательно, зависят лишь от состояний системы (точнее, от положения различных планет). Если система Σ к тому же и линейна (определение этого понятия приводится ниже), то обычно в качестве Ω используется нульмерное векторное пространство, т. е. множество $\{0\}$. Система Σ называется обратной, если переходная функция определена для всех значений t и τ , а не только тогда, когда $t \geq \tau$.

Иногда мы будем говорить о динамической системе как о восьмерке $\Sigma = (T, X, U, \Omega, Y, G, \varphi, \eta)$. Прилагательное «динамическая» мы будем упоминать лишь тогда, когда нам понадобится лишний раз подчеркнуть это свойство.

Понятие динамической системы в том виде, как мы его только что определили, является чрезмерно общим. Такое определение необходимо для того, чтобы выработать общую терминологию, исследовать и уточнить основные понятия и разглядеть единство в разнообразии приложений, но недостаточно конкретно для того, чтобы на его основе можно было получить широкий набор глубоких математических результатов и практически полезных выводов. Чтобы добраться до сильных теорем и интересных приложений, нам придется заняться конкретизацией и ввести дополнительные структуры. А по мере того как в этой книге мы займемся изучением стандартных задач теории систем — задач устойчивости, управления, идентификации, оптимизации, эквивалентности, структуры, декомпозиции и синтеза, — окажется удобным и необходимым ограничиться рассмотрением различных частных классов систем.

Разберем теперь наиболее важные свойства систем, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Система называется постоянной, или стационарной, если ее реакция на заданный отрезок входного воздействия при условии, что система находилась в заданном состоянии, не зависит от того, в каком промежутке времени осуществляется этот опыт. Другими словами, для таких систем основные соотношения (структура) не меняются во времени. Придадим теперь этим соображениям форму строгого определения.

(1.2) **Определение.** Динамическая система Σ называется *стационарной (постоянной)* тогда и только тогда, когда

(а) T есть аддитивная группа (относительно обычной операции сложения вещественных чисел);

(б) Ω замкнуто относительно оператора сдвига $z^\tau: \omega \rightarrow \omega'$, определяемого соотношением

$$\omega'(t) = \omega(t + \tau)$$

при всех $\tau, t \in T$;

(с) $\varphi(t; \tau, x, \omega) = \varphi(t + s; \tau + s, x, z^s \omega)$ при всех $s \in T$;

(д) отображение $\eta(t, \cdot): X \rightarrow Y$ не зависит от t^1).

Литература по теории систем посвящена в основном стационарным системам, поскольку их гораздо проще исследовать, чем нестационарные. Мы последуем этой традиции и построим определения и выведем результаты в первую очередь для стационарных систем, предоставив читателю самому решать, какие из них можно распространить на более общий случай. Однако во многих случаях, и в особенности в таких фундаментальных вопросах, как определение управляемости, постановка оптимальной задачи управления или эквивалентность систем и т. д., следует помнить, что допущение о стационарности системы не приводит к существенным упрощениям. Метод доказательства для более общего случая может оказаться намного сложнее, но центральные идеи доказательства, как правило, сохраняются. В связи с этим во второй части книги мы обычно не требуем стационарности системы. Нет необходимости в стационарности системы и для первой части, но здесь это предположение приводит к существенным упрощениям. Для третьей и четвертой части книги стационарность существенна, поскольку там используется в основном алгебраический аппарат.

Другая классификация систем опирается на следующее определение.

(1.3) **Определение.** Динамическая система Σ называется системой с *непрерывным временем* тогда и только тогда, когда T совпадает с множеством вещественных чисел, и называется системой с *дискретным временем* тогда и только тогда, когда T есть множество целых чисел.

Во многих приложениях теории систем различие между системами с непрерывным и дискретным временем не существенно, и выбор между ними диктуется в основном соображениями математического удобства. Системы с непрерывным временем соответствуют моделям классической физики, а системы с дискретным временем появляются естественным образом каждый раз, когда в си-

¹⁾ Обозначение $f(t, \cdot)$ означает, что рассматривается функция не указанного аргумента.

стему входит вычислительная машина. В первой части книги мы рассматриваем системы с непрерывным временем (дифференциальные уравнения) из-за прочной традиции, связанной с физическими приложениями. Во второй части мы снова изучаем системы с непрерывным временем, так как это позволяет нам воспользоваться методами вариационного исчисления и другими аналогичными методами. В третьей и четвертой частях, имеющих в основном алгебраический характер, естественным объектом исследования являются системы с дискретным временем.

Наиболее важной мерой сложности системы является структура ее пространства состояний. В связи с этим целесообразным кажется следующее определение.

(1.4) Определение. Динамическая система Σ называется *конечномерной* тогда и только тогда, когда X является конечномерным линейным пространством. При этом $\dim \Sigma = \dim X_{\Sigma}$. Система Σ называется *конечной* тогда и только тогда, когда множество X конечно. Наконец, система Σ называется *конечным автоматом* тогда и только тогда, когда все множества X , U и Y конечны и, кроме того, система стационарна и с дискретным временем.

Конечные автоматы образуют простейший общий класс систем, подвергшийся изучению. Как будет видно из материала третьей части книги, исследование конечных автоматов требует привлечения лишь финитных методов логики и алгебры.

Предположение о конечномерности системы чрезвычайно существенно с точки зрения получения конкретных численных результатов. Ведь даже тогда, когда речь идет о системах с распределенными параметрами, которые безусловно являются бесконечномерными системами, последний этап численного анализа предполагает использование конечных приближений, а это, грубо говоря, эквивалентно неявному допущению о конечномерности системы. Однако с теоретической точки зрения естественнее воспользоваться аппаратом функционального анализа и предположить, например, что пространство X банахово¹⁾. Именно этой точки зрения мы и придерживаемся во второй части книги. В первой части и до некоторой степени в четвертой роль основных допущений играют предположения о конечной размерности пространства состояний и линейности системы. В третьей части рассматриваются последствия предположения о конечномерности системы без предположения о ее линейности.

¹⁾ Естественно, что если пространство состояний системы бесконечномерно, очень важно договориться о том, какой топологией мы будем пользоваться. Определение топологии придется ввести в фундаментальное определение системы Σ ; системы, отличающиеся лишь топологиями пространства состояний, нужно будет считать различными. В этой книге мы избегаем задач такого рода, так как соответствующая теория недостаточно развита.

На протяжении всей книги понятие линейности играет очень важную роль. Прежде всего это объясняется желанием воспользоваться многочисленными достижениями «линейной математики». Но, кроме того, теория линейных систем необходима нам и для изучения локального поведения непрерывных нелинейных систем. С технической точки зрения последнее соображение является главным мотивом для изучения линейной теории.

Предположение о линейности кажется настолько заманчивым, что авторы многих элементарных учебников по теории систем начинают с объяснения «принципа» (а не допущения) суперпозиции¹⁾, не утруждая себя ни должным вниманием к проблемам причинности или понятию состояния, ни даже четким определением самого понятия системы. Каковы бы ни были педагогические достоинства указанного подхода, читателю подобных учебников грозят серьезные трудности, которые встанут перед ним позже при необходимости изучения таких разделов теории систем, как нелинейная механика, теория устойчивости, теория конечных автоматов и т. п. А так как мы в этой книге делаем специальный упор на единство теории систем, то мы предпочитаем определить линейную систему в духе фундаментального определения.

(1.5) Определение. Динамическая система Σ называется *линейной* тогда и только тогда, когда

(а) пространства X , U , Ω , Y и Γ суть векторные пространства (над заданным произвольным полем K);

(б) отображение $\varphi(t; \tau, \cdot, \cdot): X \times \Omega \rightarrow X$ является K -линейным при всех t и τ ;

(с) отображение $\eta(t, \cdot): X \rightarrow Y$ является K -линейным при любых t .

Если же, кроме того, потребовать, чтобы множества X , U и Y были конечномерны, а сама система Σ стационарна, то теория систем начинает все больше походить на классическую линейную алгебру. Именно на этой точке зрения базируется первая часть книги. Однако более пристальное изучение результатов первой части книги показывает, что классическая линейная алгебра не позволяет адекватно выражать результаты теории систем наиболее естественным образом. Это приводит нас к необходимости изучения модулей с конечным множеством образующих над кольцом многочленов (четвертая часть книги). Такой переход отражает одновременно и те сдвиги в чисто математических аспектах линейной алгебры, которые привели к замене изучения векторных

¹⁾ Термин «принцип суперпозиции» заимствован, по-видимому, из квантовой механики. Этот термин устарел и вносит путаницу. В квантовой механике «суперпозиция» означает, что пространство состояний является линейным; в теории систем «суперпозиция» означает, что зависимость выходных величин от входных воздействий линейная,

пространств изучением модулей (Бурбаки [1962]). Однако причины этих двух перемен совершенно различны.

До сих пор, определяя различные свойства систем, мы пользовались лишь простейшими теоретико-множественными и алгебраическими понятиями. Но если мы хотим использовать такой сложный математический аппарат, как дифференциальное и интегральное исчисление и анализ, то в определение системы Σ потребуется включить некоторые допущения о непрерывности. В связи с этим придется предположить, что различные множества $(T, X, U, \Omega, Y, \Gamma)$ являются топологическими пространствами и что отображения φ и η непрерывны относительно соответствующей (тихоновской) топологии. Более того, нам будет важно знать, насколько гладко во времени происходят переходы в пространстве состояний. Мы не будем здесь углубляться в детали, так как математически они в основном не принципиальны. В гл. 3 приводится строгое определение (2.1) гладкой динамической системы, которое особенно удобно для исследования задач оптимизации. Здесь же мы ограничимся лишь предварительным определением «гладкости».

(1.6) Определение. Динамическая система Σ называется *гладкой* тогда и только тогда, когда

(a) $T = \mathbb{R}$ есть множество вещественных чисел (с обычной топологией);

(b) X и Ω суть топологические пространства;

(c) переходное отображение φ обладает тем свойством, что $(\tau, x, \omega) \mapsto \varphi(\cdot; \tau, x, \omega)$ определяет непрерывное отображение $T \times X \times \Omega \rightarrow C^1(T \rightarrow X)^1$.

В § 2.1 доказывается теорема о том, что при определенных дополнительных предположениях поведение гладкой динамической системы описывается дифференциальными уравнениями. Все классические динамические системы относятся к этому типу. Конечно, дело вкуса, определять ли гладкую динамическую систему как систему, описываемую дифференциальным уравнением (как в определении (2.1) гл. 3), или основываться на определении (1.6), а затем доказывать теорему: *если система Σ является гладкой, то переходная функция φ_Σ удовлетворяет дифференциальному уравнению* (см. теорему (1.1) гл. 2).

Хочется обратить внимание читателя на то, что «входные воздействия» и «выходные величины» играют в нашем определении системы столь же важную роль, как понятие «состояние». Нас одинаково будут интересовать как взаимодействие системы с окружающей средой (описываемое функциями ω и γ), так и внутреннее поведение системы (описываемое φ).

¹⁾ $C^1(T \rightarrow X)$ обозначает семейство C^1 функций $T \rightarrow X$.

Это замечание особенно важно для третьей и четвертой частей книги, где встречается много примеров систем, исходно определяемых своими преобразованиями входных воздействий в выходные величины. При этом мы имеем в виду следующее. Для любого заданного начального состояния (τ, x) и отрезка входного воздействия $\omega_{(\tau, t_1]}$ системы Σ задается реакция системы $\gamma_{(\tau, t_1]}$, т. е. задается отображение

$$f_{\tau, x}: \omega_{(\tau, t_1]} \rightarrow \gamma_{(\tau, t_1]}.$$

Если предположить известной структуру системы в смысле определения (1.1), то значение выходной величины в момент времени $t \in (\tau, t_1]$ определяется из соотношения

$$(1.7) \quad f_{\tau, x}(\omega_{(\tau, t_1]})(t) = \eta(t, \varphi(t; \tau, x, \omega)).$$

И обратно, каждое семейство функций, обладающих теми же свойствами, что и функции из соотношения (1.7) (т. е. являющиеся композицией функций φ и η , удовлетворяющих условиям (1.1d) и (1.1e)), можно рассматривать как определяющее систему с точки зрения преобразования входных воздействий в выходные величины. Сформулируем теперь строгое определение.

(1.8) **Определение.** Динамической системой Σ (с точки зрения ее внешнего поведения) называется сложное математическое понятие, определяемое следующим образом:

(а) Заданы множества T, U, Ω, Y и Γ , удовлетворяющие всем свойствам, перечисленным в определении (1.1).

(б) Задано множество A , индексирующее семейство функций

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha: T \times \Omega \rightarrow Y, \alpha \in A\},$$

где каждый элемент семейства \mathcal{F} записывается в явном виде как $f_\alpha(t, \omega) = y(t)$, т. е. является выходной величиной для входного воздействия ω , полученной в эксперименте α . Каждое f_α называется отображением вход — выход и обладает следующими свойствами:

- (1) (Направление времени.) Существует такое отображение $\iota: A \rightarrow T$, что $f_\alpha(t, \omega)$ определено при всех $t \geq \iota(\alpha)$.
- (2) (Причинность.) Пусть $\tau, t \in T$ и $\tau < t$. Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и

$$\omega_{(\tau, t]} = \omega'_{(\tau, t]},$$

то $f_\alpha(t, \omega) = f_\alpha(t, \omega')$ при всех α , для которых $\tau = \iota(\alpha)$.

В соответствии с этим определением динамическую систему можно рассматривать как некоторый абстрактный набор экспериментальных данных. Входящие в него «эксперименты» пронумерованы с помощью абстрактного параметра α и состоят в том, что на вход системы подаются некоторые входные воздействия и на-

блюдаются соответствующие выходные величины (стимулы \rightarrow реакция). При этом, конечно, нужно подходить к описанию этих экспериментов с научной точки зрения и не накладывать на них никаких условий, которые могли бы в неявном виде ограничить множество возможных исходов эксперимента еще до его начала. Условие (b1) просто позволяет судить, когда начался каждый эксперимент, а условие (b2) требует, чтобы два эксперимента получали разные индексы, если они приводят к разным результатам в кажущихся идентичными условиях.

Задача реализации состоит в построении динамической системы в смысле определения (1.1) по данным, обеспечиваемым определением (1.8). Таким образом, это просто абстрактная формулировка научного подхода к построению моделей. При этом оказывается, что на абстрактном уровне решение этой задачи удивительно просто. Здесь мы лишь наметим его основные черты, предоставив подробный разбор читателю в качестве самостоятельного нетривиального упражнения. Позже мы приведем исчерпывающую теорию эффективного решения проблемы реализации для некоторых важных частных случаев (гл. 10).

Множество A , очевидно, соответствует некоторому подмножеству из $T \times X$. Однако множество A может оказаться недостаточным богатым. Некоторые принципиально осуществимые эксперименты могут быть не перечислены в A . Поэтому нам нужно расширить семейство \mathcal{F} таким образом, чтобы оно содержало все функции, полученные следующим образом: если $\tau < t_1 < t_2$, $\omega, \omega' \in \Omega$ и

$$\omega_{(t_1, t_2]} = \omega'_{(t_1, t_2]},$$

то функция g , удовлетворяющая соотношению

$$g(t, \omega') = f_\alpha(t, \omega), \quad t \in (t_1, t_2], \quad \iota(\alpha) = \tau,$$

должна принадлежать \mathcal{F} . Обозначим эту функцию g через f_β , где $\beta \notin A$. Тогда нужно положить $\iota(\beta) = t_1$ и заменить A на более широкое множество $A \cup \{\beta\}$. Теперь пространство состояний в момент времени τ можно определить как

$$X_\tau = \{\alpha \in A: \iota(\alpha) = \tau\}$$

и положить

$$X = \bigcup_{\tau \in T} X_\tau.$$

После этого нетрудно по виду f_α найти определения функций ϕ и η , удовлетворяющих условиям (1.1d) и (1.1e). Например, полугрупповое свойство (1.1d3) оказывается следствием правила пополнения \mathcal{F} , объясненного выше. Впрочем, нас поджидает одна трудность. Функция ϕ может быть определена не всюду на $(T \times X)$, а только для таких (τ, x) , что $x \in X_\tau$. Это ограничение является неизбежным для любой экспериментальной ситуации. Его можно обойти (как это и делается в научной практике),

предположив, что система стационарна. Переход от представления $\{A, F\}$ к представлению $\{X, \varphi, \eta\}$ играет особенно важную роль в теории конечных автоматов (гл. 7).

В литературе о проблеме реализации имеется много путаницы. Например, Задэ и Дезоер [1963] пытались использовать в качестве фундаментального определение, которое гораздо ближе к определению (1.8), чем к определению (1.1); тем не менее они требовали выполнения некоторых условий «самосогласованности» (наподобие условия (1.1d3), налагаемых на результаты эксперимента для того, чтобы объект экспериментирования можно было отнести к числу «динамических» систем. Такие условия «самосогласованности» оказываются излишними, если принять определение типа (1.8) (см. также лекции Уиндекнехта [1967]). Отметим, что предмет спора имеет здесь не философский (существует ли вообще пространство состояний или нет), а прикладной математический характер (как эффективно конструировать пространство состояний X).

На этом заканчивается описание общей картины, которую должен представлять себе читатель для того, чтобы приступить к интерпретации конкретных исследований в этой книге. В ней он встретится с применением многих совершенно различных разделов математики: теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, функционального анализа (в задачах теории управления), а также комбинаторики и теории полугрупп, групп и модулей (в задачах теории конечных автоматов). Он будет свидетелем переплетения аналитических и алгебраических подходов, аналогичного переплетению алгебраической теории конечных групп и аналитической теории групп Ли в теории групп. И мы надеемся, что, закончив эту книгу, читатель будет в состоянии выбрать для *своей* задачи теории систем тот метод, который больше всего к ней подходит независимо от существующих традиций или привычек.

(1.9) Исторические замечания. Наше определение динамической системы непосредственно обобщает классическое математическое определение системы (см. определение Немыцкого и Степанова [1949]). Это последнее появилось в результате идеализации свойств обыкновенных дифференциальных уравнений, которые со времени создания ньютоновой модели солнечной системы играют важную роль в физике. Решения дифференциальных уравнений обладают двумя особыми свойствами. Они определяют динамические системы, являющиеся *гладкими* и *обратимыми* (φ определено для всех t , а не только для $t > \tau$). Поэтому на нашем языке *классические динамические системы* — это стационарные гладкие обратимые свободные (Ω содержит всего один элемент) и (обычно) конечномерные системы с непрерывным временем и тривиальным выходным отображением $\eta(t, x) \equiv x$.

«Динамические полусистемы» Бушау [1963] и Халкина [1964] обобщали классическое определение динамической системы допущением различных входных воздействий. Аналогичное обобщение предпринял Роксин [1965], который ссылается на многие предшествующие исследования. Наше определение было сформулировано в работах Калмана (1963с) и Вейсса и Калмана [1965]. Совершенно независимо от развития классической динамики в любой теории конечных автоматов определение системы (или машины) всегда включало входные воздействия и выходные величины. Арбиб [1965] (см. также гл. 6) решительно указал на то, что динамические системы и автоматы принадлежат к одному и тому же классу объектов. Признание этого взгляда можно заметить в последних книгах по конструированию систем (см. Задэ и Дезоер [1963], Уаймор [1967] и Уиндекнехт [1967]), причем рассматриваемые системы становятся все более абстрактными и общими.

В настоящее время нет единого мнения по вопросу о том, что следует считать исходным определением системы. Различные возможности в этом направлении сравниваются в работах Арбиба [1965] и Калмана [1965b]. По-видимому, в данной области никто не может утверждать, что последнее слово осталось за ним.

1.2 Элементарная теория управления

Смысл второй главы книги заключается в том, чтобы быстро и без особого труда подготовить читателя к изучению одного раздела теории систем, в котором преобладающую роль играют математические соображения. Речь идет о теории регулирования линейных объектов управления. Ее аппарат заимствован из линейной алгебры и элементарной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Математический уровень этой главы довольно скромный, и от читателя требуется лишь определенная глубина понимания принципиальных вопросов. Приведенные там результаты относятся к числу весьма тонких и имеют давнюю историю. Многие из тем последующих глав можно рассматривать как естественное обобщение поставленных во второй главе элементарных задач.

Во второй главе довольно неторопливо нарисована картина тех основных идей и практических потребностей, которые привели к рождению математического формализма теории систем. Время от времени читатель сможет возвращаться к этой главе в поисках объяснения мотивов последующих исследований и их места в общей картине теории. Основной материал гл. 10 можно рассматривать как глубокое обобщение критерия управляемости (теоремы (4.3) гл. 2), в то время как в § 10.13 обсуждается вопрос об управляемости и идентифицируемости нестационарных объектов, являющийся необходимым условием существования регулятора (см. § 2.7).

Перечислим основные вопросы, затронутые в гл. 2. В ней исследуется задача управления некоторым фиксированным физическим объектом (самолетом, заводом, химическим технологическим процессом и т. п.), который мы называем *объектом управления*. Для наших целей понятие «объект управления» является синонимом понятия «динамическая система». Выпишем очевидные абстрактные свойства объекта, необходимые и достаточные для того, чтобы задача управления имела смысл и допускала решение (управляемость и идентифицируемость). Если объект управления считается *линейным*, то эти свойства можно эквивалентным образом выразить и как определенные свойства некоторых линейных операторов. Если же дополнительно предполагается, что объект управления *стационарен*, то критерии управляемости и идентифицируемости могут быть изящным образом выражены в замкнутой форме посредством лишь некоторых алгебраических свойств объекта. Привлекая дополнительно аппарат, близкий к аппарату классической теории канонических матричных форм, мы оказываемся в состоянии получить в явном виде решение задачи регулирования.

Весь этот материал служит превосходной иллюстрацией возможностей математики. В нем показано, как от совершенно абстрактных соображений можно перейти к сугубо конкретным результатам, которые в конце концов оказываются вполне простыми. Такая естественная простота решения этой задачи *не была известна* в теории управления вплоть до конца 50-х годов, т. е. до тех пор, пока эта задача не получила адекватной математической постановки.

1.3 Теория оптимального управления

Теория оптимального управления составляет основную тему гл. 3—5. В этих главах нас будет интересовать создание и описание научной основы решения задачи управления. А так как в гл. 2 уже будет дано основное представление об общей ориентации исследований, мы сразу можем приступить к аксиоматическому построению теории. Наш подход будет математически совершенно строгим. В общем случае мы станем рассматривать гладкие динамические системы с непрерывным временем и бесконечномерным пространством состояний.

В самом начале будет отмечено, что теория управления представляет собой совокупность математических результатов и методов, относящихся к решению задач управления. Интуитивно ясно, что каждая задача управления состоит из следующих элементов:

- 1) объекта управления,
- 2) требуемой выходной величины или цели системы,

- 3) множества допустимых управлений (или входных воздействий),
- 4) меры качества или эффективности управляющих воздействий.

Этим интуитивным представлениям придается точный смысл, после чего доказываются различные теоремы, лежащие в основе теории оптимального управления. Эти теоремы должны дать ответы на следующие фундаментальные вопросы:

1. Существуют ли оптимальные управления?
2. Если они существуют, то как их можно найти?

Мы будем пользоваться различными подходами, такими, как теория Гамильтона — Якоби, принцип Понтрягина (необходимые условия), методы функционального анализа и численные методы. Каждому из них будет уделено определенное место.

После уточнения основных понятий, используемых в нашей работе, мы получим достаточные условия оптимальности (так называемая теория Гамильтона — Якоби) с помощью леммы Каратеодори, следуя идеям Калмана [1963a]. Центральными здесь являются понятие регулярности гамильтониана и уравнение Гамильтона — Якоби в частных производных. Основным результатом служит теорема (4.14).

Очень важной и полезной областью применения теории Гамильтона — Якоби является ситуация, в которой наша динамическая система линейна, а функционал качества квадратичный. Эта ситуация особенно интересна из-за своих связей с традиционными методами автоматики (классическими методами компенсации) и из-за того, что она возникает при необходимости устранять малые отклонения от номинальных траекторий (так называемые методы теории возмущений второго порядка). Здесь основным моментом является введение (операторного) уравнения Риккати (лемма (5.11)). Мы исследуем различные свойства уравнения Риккати и по этим свойствам убеждаемся, что задача оптимизации линейной системы с квадратическим критерием качества имеет решение (теорема (5.42)). А так как получаемая оптимальная система оказывается системой с обратной связью, этот результат имеет огромное практическое значение.

Главу 3 завершает изучение фильтров Калмана — Бюси. Другими словами, в ней рассматривается вопрос об определении «наилучшего» (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) линейного фильтра для «сигнала», генерируемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Мы выводим уравнение типа уравнения Винера — Хопфа (теорема (6.41)), а затем из этого уравнения находим стохастическое дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять оптимальная оценка. Здесь наиболее важную роль играют два момента: определение корреляционной матрицы как

некоторого ограниченного линейного преобразования и использование теоремы типа теоремы Фубини для изменения порядка стохастического интегрирования и интегрирования по Лебегу. Отметим, что оптимальный фильтр можно рассматривать как оптимальный регулятор линейной динамической системы, «двойственной» исходной стохастической системе. В связи с этим полученные раньше результаты решения задачи управления линейной системы с квадратическим критерием качества можно использовать и для исследования свойств оптимального фильтра. Материал этого раздела опирается главным образом на работы Фалба [1967] и Калмана и Бюси [1961] и требует довольно глубоких математических познаний.

В главе 4 мы переходим к необходимым условиям оптимальности. Вначале изучаются необходимые условия первого порядка, аналогичные известным уравнениям Эйлера в вариационном исчислении. При этом используется теория возмущений, а центральную роль играют гамильтонианы. Важное значение имеет введение линейных уравнений в возмущениях (1.5), которые описывают поведение системы «вблизи» номинальной траектории. Основным результатом здесь (теорема (1.12)) состоит в следующем: управление будет оптимальным, если у гамильтониана существует экстремум.

Затем изучается принцип максимума Понтрягина и его сотрудников, составляющий в случае конечномерной динамической системы значительное усиление необходимых условий. Принцип Понтрягина весьма полезен при конструировании систем управления, и он часто применяется для решения практических задач. За строгой формулировкой принципа максимума следует его эвристическое доказательство на основе понятия полного множества возмущений и использования разделения гиперплоскостью соответствующего выпуклого конуса и луча возрастания качества. Условия принципа максимума связаны с исследованием канонических систем, минимизации гамильтонианов и различных граничных условий.

А так как возможность использования необходимых условий зависит от существования оптимальных управлений, приводится простая теорема существования. Эта теорема основана на понятии достижимости и хорошо известном факте существования минимума на компактном множестве у полунепрерывной снизу вещественной функции. В общем же случае важнейший вопрос о существовании оптимальных управлений чрезвычайно глубок, и здесь мы затронули его лишь вскользь.

Задачу управления можно рассматривать как частный случай задачи условной минимизации функционалов, определенных на нормированных линейных пространствах. Глава 4 завершается кратким упоминанием о различных элегантных и весьма сильных

обобщениях принципа максимума, принадлежащих Халкину [1967], Нейштадту [1966—1967] и Кенону, Каллуму и Полаку [1968].

Некоторые пути использования теоретических соображений предыдущих глав при решении задач синтеза систем управления обобщаются в гл. 5. Вначале рассматривается простая задача оптимизации по быстродействию системы, описываемой двумя интегралами, поскольку эту задачу можно решить аналитически. Подход к ее решению основывается на принципе Понтрягина, так как результаты гл. 4 позволяют просто установить существование оптимального управления. Затем рассматриваются различные этапы использования необходимых условий оптимальности для определения оптимального управления в общей задаче управления и отмечаются многие трудности, которые могут встретиться на этом пути.

Решение практических задач управления в большинстве случаев требует применения численных методов. Поэтому остальной материал гл. 5 посвящен численным методам. Мы начинаем с общих замечаний об итеративных методах, чтобы выявить общие идеи, лежащие в основе различных методов, используемых на практике. Затем мы переносим внимание на косвенные методы оптимизации и особенно пристально изучаем подходы к решению двухточечных граничных задач, возникающих из необходимых условий оптимальности. Мы рассматриваем градиентный метод, метод Ньютона — Рафсона в подходе к решению двухточечной граничной задачи с точки зрения «окрестностей оптимума» и метод последовательных приближений, связанный с квазилинеаризацией. И снова нас больше всего волнуют основные идеи, а не детали вычислений.

Наше изучение численных методов завершается рассмотрением прямых методов. Здесь ключевое место занимает понятие минимизирующего семейства. Среди приведенных результатов дана аппроксимационная теорема (см. Курант и Мозер [1962]), создающая теоретическую основу для применения оценочных функций. Мы рассматриваем также известный метод Ритца, который, по нашему мнению, недостаточно использовался в задачах конструирования систем управления.

1.4 Автоматы

Общность различных подходов в задачах теории систем подчеркивалась неоднократно. В гл. 6 мы подробно рассматриваем, каким образом, изучая понятия управляемости, линейности или оптимальности на примере систем с конечным множеством состояний, мы проливаем новый свет и на теорию управления. В частности, мы увидим, что такие понятия, как наблюдаемость, хорошо изученные для линейных систем, могут приобрести много новых свойств в мире нелинейных систем.

Остальной материал третьей части посвящен обстоятельному обсуждению алгебраических методов изучения конечных автоматов, причем особый упор делается на методы замены системы некоторой комбинацией более простых систем.

Напомним¹⁾, что *автомат* (или *машина*) абстрактно описывается пятеркой $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$, где X — конечное множество *входных воздействий*, Y — конечное множество *выходных величин*, Q — некоторое (не обязательно конечное) множество *состояний*, $\lambda: Q \times X \rightarrow Q$ есть *одношаговая переходная функция*, а $\delta: Q \times X \rightarrow Y$ есть *одношаговая выходная функция*. На языке определений из § 1.1 автомат представляет собой стационарную динамическую систему с дискретным временем. Обычно его пространство состояний также конечно.

Рассмотрим множество X^* — множество всевозможных конечных последовательностей входных символов — и добавим к нему Λ — «пустую последовательность» символов. Множество X^* представляет собой полугруппу относительно этой операции сопряжения (другими словами, операция сопряжения ассоциативна, $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$, и для нее имеется единица Λ). Продолжим затем область определения функций λ и δ , потребовав, чтобы первая отображала $Q \times X^*$ в Q , а вторая — в Y .

С каждым состоянием q автомата M можно связывать способ преобразования входных последовательностей в выходные величины. Этот способ описывается функцией $M_q: X^* \rightarrow Y$, где $M_q(x) = \delta(q, x)$. Ясно, что автомат M будет вести себя одинаково, если он начинает работать в состояниях q или q' , для которых функции вход — выход одинаковы, т. е. $M_q(x) = M_{q'}(x)$ при любых входных последовательностях x . Поэтому, если M интересует нас исключительно с точки зрения его поведения, этот автомат можно заменить *приведенным*, в котором каждой отдельной функции M_q соответствует всего одно состояние.

С каждым таким автоматом мы связываем полугруппу, т. е. совокупность преобразований его пространства состояний, индуцированных различными входными последовательностями. Эта полугруппа будет конечной тогда и только тогда, когда конечно множество состояний автомата.

Теперь для заданной полугруппы S и функции $i: S \rightarrow Y$ можно определить новый «полугрупповой» автомат с «выходом, зависящим лишь от состояния»,

$$M(S, i) = (S, S, Y, \lambda, \delta),$$

¹⁾ Мы будем пользоваться здесь обозначениями, более созвучными с принятыми в теории автоматов, чем в остальных разделах книги. Предупреждаем читателя, что разновидностей обозначений в этой новой области почти столько же, сколько исследователей.

где $\lambda(s, s') = s \cdot s'$ (здесь \cdot означает полугрупповую операцию), а $\delta(s, s') = i(s \cdot s')$.

Будем говорить, что автомат M моделирует автомат M' , если после соответствующего кодирования и декодирования входных и выходных символов автомат M оказывается в состоянии преобразовывать входные последовательности точно так же, как и автомат M' . Потребуем, чтобы кодирование и декодирование выполнялись без памяти (т. е. осуществлялись посимвольно). Иначе говоря, потребуем, чтобы автомат M' выполнял всю вычислительную работу, связанную с запоминанием. Если M моделирует M' , мы будем обозначать это через $M' | M$ и говорить, что « M' делит M ». Если же одновременно $M' | M$ и $M | M'$, то про автоматы M и M' говорят, что они *слабо эквивалентны*. Полезность полугрупповых представлений в теории конечных автоматов становится очевидной из следующего: если автомату M соответствует полугруппа S , то функцию i можно определить таким образом, что автомат $M(S, i)$ *слабо эквивалентен* автомату M .

Выясняется, что для полугрупп, а следовательно, и для автоматов существует естественное понятие делимости. Важная связь между понятиями делимости полугрупп и автоматов с точностью до одного дополнительного условия состоит в следующем. Автомат M_1 делит автомат M_2 тогда и только тогда, когда пара (S_1, i_1) , соответствующая автомату M_1 , делит пару (S_2, i_2) , соответствующую автомату M_2 .

Известно, что любой конечный автомат может моделироваться некоторой схемой из модулей (т. е. конечных автоматов с одним состоянием) при условии, что в схеме могут быть замкнутые контуры. Синтез таких схем составляет основное содержание учебников по теории переключающихся схем. На самом же деле можно построить такую схему из модулей всего одного типа (моделирующих штрих Шеффера). Другими словами, если разрешить существование замкнутых контуров, то для построения произвольного конечного автомата достаточно очень простого набора элементов. Здесь же мы приведем некоторые теоремы об ограничениях, возникающих в связи с запрещением использовать замкнутые контуры в схемах (при этом, конечно, не исключается возможность замкнутых контуров во внутренней структуре автоматов, образующих схему).

Для заданных автоматов M и M' и подходящего отображения Z определяется $M' \times_z M$ — каскадное соединение M' и M с отображением связи Z , описываемое схемой, представленной на рис. 1.1. Для того чтобы получить последовательное соединение (сохраняя к тому же выход автомата M), нам достаточно положить Z не зависящим от X , а для того, чтобы получить параллельное соединение, мы выберем $Z(\tilde{x}, y) \equiv \tilde{x}$.

Строгое определение композиции без замкнутых контуров состоит в последовательном применении каскадных соединений с безинерционными устройствами кодирования и декодирования.

Автомат M называется *тождественно-возвратным*, если каждый его входной символ либо возвращает его в состояние, соответствующее этому символу ($\lambda(q, x) = q_x$, $q \in Q$), либо оставляет автомат в том же состоянии, что и раньше ($\lambda(q, x) = q$, $q \in Q$).

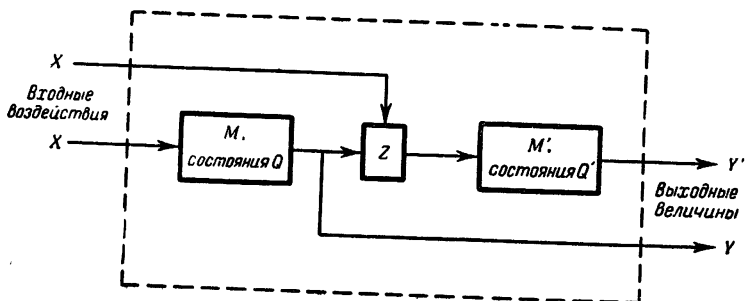


Рис. 1.1.

Особое значение имеет тождественно-возвратный автомат с двумя состояниями, который мы называем *триггером F*. Он имеет состояния $\{q_0, q_1\}$ и входные символы $\{e, x_0, x_1\}$, где $\lambda(q, e) = q$ (e — нейтральный входной символ), $\lambda(q, x_i) = q_i$ (т. е. x_i возвращает триггер в состояние q_i), а состояние автомата и его выходной символ совпадают. Заметим, что любой тождественно-возвратный автомат можно построить в виде схемы из триггеров F без замкнутых контуров.

Крону и Роудзу [1965] принадлежит следующий важный результат: *любой автомат M можно реализовать в виде схемы без замкнутых контуров из триггеров и автоматов простых групп (не обязательно всех), делящих полугруппу автомата M .*

Решающее значение здесь имеет вопрос о том, что мы не можем добиться действительно глубокого понимания структуры наших систем, не прибегая к мощным алгебраическим методам.

Но конечный автомат представляет собой алгебраический объект, наделенный относительно бедной структурой, и по полугруппе удастся получить лишь частичную информацию о его декомпозиции. Если же говорить о более узком классе систем, то соответствующую систему, возможно, удастся наделить более богатой структурой, а затем алгебраическими методами получить более подробную информацию о структуре исходной системы.

Правдоподобность этого общего тезиса подтверждается в четвертой части книги. Если ограничиться изучением линейных си-

стем, то кроме полугрупповой операции можно будет ввести (новые) операции свертки и сложения. Получающаяся в результате алгебраическая структура известна как модуль, и мы сможем убедиться в том, что алгебраическая теория модулей действительно служит мощным средством анализа линейных систем.

1.5 Алгебраическая теория линейных систем

Авторы учебников по элементарной теории линейных систем всегда утверждали, что преобразования Лапласа используются для «алгебраизации» процесса решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это утверждение еще более укоренилось в результате исследований последнего двадцатилетия. В настоящее время определение преобразования Лапласа как некоторого интеграла все чаще отодвигается на задний план, в примечания, а алгебраические вопросы (разложение на элементарные дроби или канонические формы матриц) — приобретают все больший и больший вес. Кроме того, уже давно известно, что эти методы пригодны не только для систем с непрерывным временем. Так называемая теория « z -преобразований» конечно-разностных уравнений и импульсных систем (см. Фриман [1965]) вполне установилась и широко используется.

В гл. 10 с самого начала изучается внутренняя алгебраическая структура теории линейных систем, для чего воедино связываются три следующих различных направления исследований.

1. Элементарные построения теории конечных автоматов и в первую очередь те из них, которые связаны с определением состояния как некоторого класса эквивалентности входных воздействий (гл. 7).

2. Современное изложение линейной алгебры, подчеркивающее роль модулей как обобщения векторных пространств (см. Ван дер Варден [1931], где впервые использованы модули для получения канонических форм матриц).

3. Общий «опыт», накопленный по мере создания теории импульсных систем в пятидесятых годах (см. Фриман [1965]). (Мы имеем в виду при этом лишь исторический аспект создания теории и не требуем от читателя никаких специальных знаний.)

Большая часть излагаемой теории линейных систем оригинальна и принадлежит Калману [1967]. В этой теории состояния, входные воздействия и выходные величины рассматриваются как равноправные. Все они описываются многочленами или формальными степенными рядами над произвольным полем K . Потребовав, чтобы поле K было конечным, мы могли бы получить большинство результатов, относящихся к теории линейных конечных переключаемых схем. Состояния системы образуют модуль, для которого входные воздействия играют роль кольца операторов. Описание

действия входных воздействий на состояния линейной системы с помощью модуля аналогично использованию полугрупп в теории Крона — Роудза, но ни одна из этих теорий не является частным случаем другой.

Этот новый подход позволяет ввести передаточную функцию линейной системы без каких-либо ссылок на преобразования или порождающие функции. При этом передаточные функции приобретают даже большее значение, чем раньше. Они оказываются особенно полезными для выявления структуры модуля, отвечающего рассматриваемой системе.

Очертим теперь основные математические идеи теории.

Функцию вход — выход f стационарной линейной системы Σ определим необычным, но очень удобным образом. Пусть Ω — пространство всевозможных входных функций с компактным носителем, которые, кроме того, обращаются тождественно в нуль при $t > 0$. Аналогично, пусть Γ есть пространство всевозможных выходных функций, определенных лишь для $t > 0$. Тогда отображение $f: \Omega \rightarrow \Gamma$ можно интерпретировать следующим образом: на вход системы подается входное воздействие ω , заканчивающееся в момент времени 0, и после этого начинается наблюдение реакции системы γ . Легко видеть, что для стационарной системы такое определение функции вход — выход не ограничивает его общности.

Естественно, что если система Σ линейна, то ее функция вход — выход f_Σ должна быть K -линейной (где K — некоторое поле). Поэтому Ω и Γ нужно наделить структурой K -векторного пространства. А так как f линейно, для него существует каноническая факторизация: $f = f_3 f_2 f_1$, где f_1 сюръективно, f_2 есть изоморфизм, а f_3 взаимно однозначно. Обозначая образ f_1 через X , а образ f_2 через Ξ , мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & \Xi \\ f_1 \uparrow & & \downarrow 1-f_3 \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

Точно такая же диаграмма получится, если идти от линейного дифференциального (или конечно-разностного) уравнения с пространством состояний X и выходным пространством Γ . Это наводит на мысль, что приведенная факторизация отображения вход — выход f соответствует реализации f некоторой динамической системы. Эту идею можно выразить строго следующим образом.

1. Заметим, что Ω изоморфно некоторому свободному $K[z]$ -модулю и что все остальные пространства диаграммы можно наделить структурой $K[z]$ -модуля, не нарушая коммутативности. (Под $K[z]$ мы понимаем кольцо многочленов с независимой переменной z и коэффициентами из поля K .)

2. Внешние операции $K[z]$ -модуля X не отвечают динамическому воздействию входных возмущений на состояния системы (здесь $K[z]$ -модуль мы обозначаем тем же символом, что и K -векторное пространство). Однако оказывается, что множество X в точности совпадает с множеством классов эквивалентности Нерода из теории конечных автоматов (см. § 7.2). Поэтому X можно, по крайней мере интуитивно, рассматривать как пространство состояний. Но тогда по модулю X нетрудно построить динамическую систему. Например, отображение $z: x \mapsto z \cdot x$ определяет свободные движения динамической системы.

Между описанной процедурой и построением полугрупп в теории Крона — Роудза имеется существенное различие. В нашем случае умножение в пространстве входных воздействий соответствует операции свертки, а в теории Крона — Роудза — операции сочленения. Операция свертки является гораздо более известным видом умножения и в течение длительного времени широко использовалась на интуитивном уровне в теории линейных систем. В связи с этим «новая» алгебраическая теория полностью согласуется со «старой» теорией, основанной на преобразованиях Лапласа. Кроме того, новая теория позволяет получать более выразительные результаты в целом ряде областей, особенно результаты, касающиеся структуры сложных систем. Требование сюръективности одного из преобразований на коммутативной диаграмме эквивалентно требованию полной достижимости. А в силу дуальности взаимнооднозначность эквивалентна полной наблюдаемости. Имея это в виду и *пользуясь только коммутативными диаграммами*, мы докажем важный результат, согласно которому минимальная реализация f полностью достижима и полностью управляема. Раньше этот результат удавалось получить (§ 10. В) лишь в результате долгих расчетов, существенным образом основанных на линейности системы. Таким образом, «каноническая факторизация» оказывается синонимом «минимальной реализации». С помощью той же диаграммы можно непосредственно получить и много других интересных результатов. Например, существование передаточной функции можно установить, рассматривая отображения в G -образующих модуля Ω и учитывая предположение о том, что модуль X — модуль с кручением.

Два вида умножения, используемых в линейной теории и теории Крона — Роудза, являются по сути дела двумя различными «функторами», каждый из которых заменяет динамическую систему некоторой алгебраической структурой. Получаемые результаты отдаленно напоминают друг друга и далеко не тождественны. Эти теории пересекаются тогда и только тогда, когда система Σ линейна над *конечным* полем (т. е. когда пространство состояний системы Σ конечно), но простые теории модулей и теории Крона — Роудза тем не менее оказываются совершенно различными.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ С СОВРЕМЕННОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Р. Калман

2 Теория регулирования линейных объектов

Основная цель этой главы состоит в получении важнейших результатов, относящихся к задаче регулирования классической теории управления. При этом мы будем в первую очередь стремиться к математической ясности и не станем останавливаться на физических или технических аспектах проблемы. Это согласуется со второй целью, преследуемой в этой главе: ввести некоторые центральные для нашей книги понятия, связанные с описанием систем, их структурой, оптимизацией и свойством линейности. Каждая из этих тем естественным образом возникает при решении задачи регулирования. В некотором смысле содержание этой главы служит той основой, на которой возникли различные специальные исследования теории систем.

Мы займемся здесь достаточно узким вопросом — задачей аналитического конструирования регуляторов для стационарных (с постоянными коэффициентами) линейных объектов. Чтобы не затягивать чрезмерно это введение, мы оставим в стороне такие более глубокие проблемы, как проблема оптимальности, вопрос о влиянии помех и т. п., а сосредоточим внимание на построении класса стратегий управления, обеспечивающих выполнение фундаментального требования устойчивости системы.

Центральный результат этого раздела теории управления состоит в том, что существование, а также и сама конструкция регуляторов предопределяются двумя важнейшими свойствами объекта управления: его *полной управляемостью* и *полной идентифицируемостью*. Первое из этих свойств означает, что с помощью подходящим образом выбранного управления из любого состояния системы можно перейти в начало координат пространства состояний. Второе же утверждает, что по наблюдениям предыстории (внешних) входных и выходных величин всегда мож-

но определить текущее (внутреннее) состояние системы. Очевидно, что наличие этих двух свойств необходимо для существования регулятора. Однако относительно недавно (в 1959 г.) удалось выяснить, что, как это ни удивительно, управляемости и идентифицируемости объекта оказалось достаточно и для существования решения этой задачи. С современной точки зрения все достижения классической теории управления объясняются тем, что в ней изучались только такие модели, для которых свойства управляемости и идентифицируемости были естественными.

Класс регуляторов, рассматриваемых в этой главе, ни в коем случае не является специфическим или произвольно выбранным. В действительности *структура* этих регуляторов в точности совпадает с той, которую требует теория оптимальных стохастических систем. Лишь значения выбираемых коэффициентов усиления в цепи обратной связи оказываются разными. Для рационального выбора этих значений необходимо задаться критерием оптимальности относительно окружающей среды, в которой должна функционировать система. Конкретный расчет значений коэффициентов усиления в цепи обратной связи требует привлечения всех средств теории оптимального управления (в этой связи особенно важны § 3.5, 5.4 и 5.5).

В настоящей главе от читателя потребуются относительно скромные знания — знакомство с элементарной теорией дифференциальных уравнений и линейной алгеброй. Специальные знания по теории управления не предполагаются. Читателю можно порекомендовать параллельно познакомиться с каким-нибудь современным курсом по теории управления (например, с книгой Пешона [1963]), что поможет ему оценить широту приложений развинутого здесь математического аппарата.

2.1 Постановка задачи управления

Цель управления состоит в том, чтобы изменить динамику поведения физической системы в соответствии с желаниями человека. Эта задача естественным образом распадается на две совершенно различные части.

1. Необходимо получить математическое описание динамических свойств физической системы (объекта), подлежащей управлению.

2. Необходимо найти «средство» достижения желаемого поведения управляемой системы.

Первая из этих задач по существу есть задача моделирования: необходимо предсказать динамику поведения объекта с помощью нашей математической модели с точностью, по крайней мере не меньшей, чем требуемая точность управления. Этой моделью

объекта может быть динамическая система в смысле определения § 1.1. Требуемая модель получается в результате физических экспериментов или с помощью известных физических законов. Построение конкретных моделей обычно относится к компетенции физиков и не входит в компетенцию ни специалистов по теории управления, ни даже по теории систем.

После того как модель объекта построена, можно переходить ко второй, чисто математической части задачи. Различные «средства», позволяющие осуществлять управление, создаются на базе высокоразвитой технологии, как правило, с привлечением вычислительных машин, для которых математическое описание часто (но, конечно, не всегда) играет роль обычных технических чертежей. Другими словами, вторая половина проблемы такова, что для ее решения требуется некоторый математический результат (теорема). Верно и обратное, каждое эффективное средство управления представляет собой некоторый математический результат.

Или в еще более категорической форме: *теория управления не занимается исследованием реального мира, а лишь математическими моделями определенных аспектов реального мира. В связи с этим аппарат, а также результаты теории управления являются математическими.*

Эта ситуация очень сильно напоминает историю превращения теории вероятностей в чисто математическую дисциплину.

Рассмотрим конкретный пример, представляющий в наши дни определенный самостоятельный интерес. Предположим, что нужно запустить космический корабль, который должен опуститься в определенную точку поверхности Луны. Специалист по теории управления подойдет к формулировке соответствующей задачи управления следующим образом.

1. Для достижения кораблем заданной точки необходимо вывести его на орбиту с высокой точностью, а затем обеспечить его полет по рассчитанной заранее траектории без существенных отклонений вплоть до момента посадки. Это невозможно сделать без специального управления в связи с трудностями точного вывода на орбиту, наличием случайных возмущений, действующих на корабль во время полета между Землей и Луной, и т. д.

2. Математическую модель движения корабля можно построить, воспользовавшись уравнениями небесной механики, высокая точность которых известна. Физические характеристики корабля можно считать заданными, поскольку мы сами его строим. Входные воздействия на систему, с помощью которых осуществляется управление, создаются различными реактивными рулями и двигателями. Выходными величинами являются координаты, скорости или другие параметры движения корабля, измеряемые с помощью оптических, инерциальных или других приборов.

3. Теперь у нас есть строгое описание объекта как некоторой динамической системы. В силу известных свойств уравнений небесной механики эта система должна быть конечномерной гладкой и (к сожалению) нестационарной и нелинейной системой с непрерывным временем.

4. В качестве рабочей гипотезы принимаем, что можно рассматривать лишь малые отклонения от заданной траектории полета. Это позволит приближенно (естественно в некотором точном математическом смысле) описать поведение объекта линейной нестационарной системой.

5. Воспользуемся известными или специально для этого случая разработанными результатами линейной теории управления, чтобы получить решение в явном виде, предполагая, если это необходимо, даже стационарность системы.

6. Исследуем полученное решение и попробуем обобщить его с тем, чтобы освободиться от ограничений, связанных со стационарностью или линейностью.

Разберемся теперь более подробно в том, как должен вести себя управляемый космический корабль. В идеальном случае нам хотелось бы, чтобы корабль осуществлял произвольные маневры в ответ на команды его пилотов. Но такая задача слишком сложна (на современном уровне техники), и поэтому можно удовлетвориться более простыми целями. Потребуем, чтобы корабль следовал по заданной траектории до самого момента посадки. Отклонения от этой траектории должны быть по возможности малыми в течение всего полета, а особенно в момент достижения Луны. Это типичная *задача регулирования*, в которой требуется, чтобы в результате управления объект вел себя заданным образом.

Решение задачи регулирования состоит в определении *закона управления*, устанавливающего значения управляющих воздействий в зависимости от величины измеренного отклонения корабля от заданной траектории. Физическое воплощение закона управления, *регулятор*, обычно представляет собой какое-то электронное устройство или вычислительную машину. Мы удовлетворимся получением явных уравнений, описывающих регулятор, и будем считать этот процесс нахождения уравнений эквивалентным «конструированию» регулятора.

Чрезвычайно ценно отметить, что в теории управления совершенно не важна физическая природа объекта, описываемого данной динамической системой. Важна лишь математическая структура объекта управления (вот почему теория управления *не разбивается* на разделы, занимающиеся, скажем, космическими кораблями, самолетами или морскими судами). Таким образом, наша задача чисто математическая.

Современные работы по теории управления обычно начинают словами:

Пусть объект управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)),$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, а $f: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, которая по крайней мере является липшицевой по x), и т. д.¹⁾.

Однако нам будет приятнее начать построение теории управления путем вывода приведенного уравнения на основе абстрактных свойств объекта, рассматриваемого как динамическая система в смысле строгого определения (1.1). Для этой цели нам понадобится следующая теорема. Среди ее условий центральную роль играет условие (с) гладкости системы Σ .

(1.1) **Теорема.** Пусть Σ есть гладкая динамическая система в смысле определений (1.1) и (1.6) гл. 1. Точнее говоря, пусть

- (а) $T = \mathbb{R}$, X и U — нормированные пространства;
- (б) Ω — нормированное пространство непрерывных функций $T \rightarrow U$ с нормой $\|\omega\| = \sup_{t \in T} \|u(t)\|^2$;

(с) $\varphi(\cdot; \tau, x, \omega) \in C^1(T \rightarrow X)$ для каждого τ, x и ω , а отображение $f: T \times X \times \Omega \rightarrow T$, задаваемое отображением $(\tau, x, \omega) \mapsto \dot{\varphi}(\tau; \tau, x, \omega)$ ³⁾, непрерывно при каждом t относительно тихоновской топологии.

Тогда переходная функция φ системы Σ является решением дифференциального уравнения

$$(1.2) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, \pi_t \omega),$$

в котором оператор π_t есть отображение $\Omega \rightarrow U$, определяемое соответствием $\omega \mapsto u(t) = \omega(t)$.

Доказательство этой теоремы представляет собой несложное упражнение на определение непрерывности, и мы опустим его подробности, так как они ничего не дают для наших целей.

(1.3) **Замечание.** Хотя приведенная теорема и кажется чрезвычайно общей, она все же не распространяется на системы некоторого типа. Например, Задэ и Дезоер [1963] доказывают (нестро-го), что π_t «нужно» определять следующим образом:

$$\pi_t^*: \omega \mapsto (u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t)).$$

¹⁾ Всюду в этой книге \mathbb{R} обозначает множество вещественных чисел.

²⁾ Значения ω будут обозначаться через $u(t)$; в некоторых случаях вместо ω мы будем писать $u(\cdot)$.

³⁾ Точкой сверху ($\dot{\varphi}$) обозначена для краткости производная по времени, n -ю производную по времени будем обозначать через $\varphi^{(n)}$.

Для получения этого результата нам пришлось бы видоизменить условия (b) и ввести на Ω следующую норму:

$$\|\omega\| = \sup_{t \in T} [\|u(t)\| + \|\dot{u}(t)\| + \dots + \|u^{(q)}(t)\|].$$

Это предположение кажется нам неестественным.

Легко видеть, что теорема (1.1) сформулирована таким образом, чтобы обеспечить «поточечную» зависимость правой части уравнения (1.2) от ω . Любой другой характер зависимости от ω означал бы, что система Σ недостаточно гладка для того, чтобы ее можно было описать дифференциальным уравнением. Например, будем считать Σ такой, что

$$(1.4) \quad y(t) = u(t), \quad t \in T, \quad U = Y = \mathbf{R}^1,$$

т. е. задано внешнее описание системы Σ (см. определение (1.8) гл. 1). Такая система строго определена и в смысле определения (1.1) гл. 1. В этом случае η есть тождественная функция, а

$$\varphi(t; \tau, x, \omega) = \pi_t \omega = u(t).$$

Но тогда

$$(1.5) \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt} (\pi_t \omega) = \pi_t \dot{\omega};$$

отсюда следует, что система (1.4) *может считаться гладкой только в том случае, если заменить ее исходное пространство входных воздействий Ω пространством $\dot{\Omega}$* . Интуитивный смысл этого утверждения очевиден. У системы (1.4) нет «памяти» в том смысле, что значение входного воздействия в любой момент времени содержит всю информацию, необходимую для формирования выходной величины. Что же касается системы (1.5), то она «запоминает» $u(t)$, а информация, содержащаяся во входном воздействии, служит тем минимумом (а именно $\dot{u}(t)$), который необходим для того, чтобы «освежить» ее память.

Заметим также, что требование гладкости системы Σ не позволяет входному воздействию оказывать мгновенное воздействие на выходную величину (что имеет место для системы (1.4)). Это предположение чрезвычайно удобно, поскольку нам хотелось бы, чтобы понятие причинной связи (входное воздействие вызывает изменение выходной величины) было однозначным. (Обратите внимание на то, что в системе (1.4) вход и выход системы можно поменять ролями, а в реальных системах это невозможно.)

Поскольку мы выяснили, что объект управления должен описываться дифференциальным уравнением, можно перейти к более строгим математическим определениям.

(1.6) **Задача регулирования.** Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)),$$

$\varphi^*(t) = \varphi(t; \tau^*, x^*, \omega^*)$ — некоторое фиксированное движение (решение) объекта, и пусть (s, x) — некоторое фиксированное событие, где $x \neq \varphi^*(s)$. Рассмотрим это событие как возмущение в момент времени $t = s$ фиксированного движения объекта и будем искать такое управление (функцию) ω_x , что $\varphi(t; s, x, \omega_x) \rightarrow \varphi^*(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, потребуем (строгое определение будет дано для каждого из случаев), чтобы

(а) либо $\varphi(t_1; s, x, \omega_x) = \varphi^*(t_1)$ при некотором $t_1 > s$ (сходимость за конечное время),

(б) либо регулируемое движение является устойчивым (нечувствительным к последующим возмущениям) и сходится к φ^* наиболее быстрым образом.

(1.7) **Замечание.** Данная формулировка охватывает лишь малую часть задачи управления, и только ее мы будем рассматривать в этой главе с достаточной глубиной. Вопрос о возникновении возмущений мы решаем здесь наиболее примитивно: „каким-то“ образом в момент времени s система из состояния $\varphi^*(s)$ переходит в состояние x_0 . На самом деле этот процесс разумнее было бы описать с помощью некоторой статистической модели. Но мы не станем даже объяснять, как на практике задается $\varphi^*(t)$; более того, чаще всего мы будем (для простоты) предполагать, что $\varphi^*(t) = 0$.

2.2 Гладкие линейные системы

Ограничимся пока рассмотрением (1) линейных (2) конечномерных и (3) гладких динамических систем Σ . Из-за того что нам нужна линейность, пространство состояний должно быть векторным, поэтому в качестве X мы возьмем \mathbb{R}^n . А так как переходная функция должна быть линейной на $X \times \Omega$, ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \varphi(t; \tau, x, \omega) &= \varphi(t; \tau, x, 0) + \varphi(t; \tau, 0, \omega) = \\ &= \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)\omega. \end{aligned}$$

Линейное отображение $x \mapsto \Phi(t, \tau)x$, определяемое первым членом правой части этого уравнения, называется *переходным отображением* системы Σ . Оно определяет *свободное движение* системы Σ , т. е. движение при воздействии тривиального входного сигнала $\omega = 0$. Для исследования второго члена в правой части уравнения (2.1) нам понадобится привлечь факт гладкости системы Σ . Для

этого положим $T = \mathbf{R}$. В силу теоремы (1.1) φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \varphi(t; \tau, x, \omega) = f(t, \varphi(t; \tau, x, \omega), u(t)).$$

Поскольку φ линейно по (x, ω) , ясно, что правая часть этого уравнения линейна по своим второму и третьему аргументам. Поэтому можно ввести функции $F: T \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times n\}$ и $G: T \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times m\}$ и переписать правую часть уравнения (2.2) в виде

$$(2.3) \quad \dot{f}(t; x, u(t)) = F(t)x + G(t)u(t).$$

В этих новых обозначениях уравнение (2.2) эквивалентно следующему:

$$(2.4) \quad \frac{dx}{dt} = F(t)x + G(t)u(t);$$

в частности, *переходное отображение* (или *переходная матрица*) Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = F(t) \Phi(t, \tau)$$

и дополнительному соотношению

$$(2.6) \quad \Phi(\tau, \tau) = I,$$

где I — единичная матрица.

Отметим, что уравнения (2.5) и (2.6) в совокупности определяют Φ однозначным образом, причем второе из них соответствует аксиоме (1.1d2) в общем определении динамической системы (см. § 1.1). Наконец, так как η должно быть линейным на X , имеем

$$(2.7) \quad y(t) = \eta(t, x(t)) = H(t)x(t),$$

где $H: T \rightarrow \{\text{матрицы } p \times n\}$.

Тот факт, что Σ — гладкая система, требует непрерывности функций, соответствующих матрицам F , G и H . С прикладной точки зрения это важные предположения, но в последующем мы не станем останавливаться на них, поскольку нам хочется предельно упростить изложение.

Все сделанные выше замечания объединим теперь в следующей теореме.

(2.8) Теорема. *Каждая конечномерная линейная гладкая динамическая система Σ с непрерывным временем описывается соотношениями*

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t)x + G(t)u(t), \\ y(t) &= H(t)x(t). \end{aligned}$$

Справедлива и обратная теорема.

(2.10) **Теорема.** Для заданных соотношений (2.9) имеется единственная динамическая система Σ , обладающая всеми свойствами, упомянутыми в теореме (2.8). Кроме того, такая система является обратимой.

Доказательство. Если Φ определяется уравнениями (2.5) и (2.6), то известно, что общее решение дифференциального уравнения (2.9) можно представить в виде

$$(2.11) \quad \varphi(t; \tau, x, \omega) = \Phi(t, \tau) x + \int_{\tau}^t \Phi(t, \sigma) G(\sigma) u(\sigma) d\sigma.$$

Легко проверить, что φ обладает всеми свойствами переходной функции.

Важно помнить, что соотношение (2.11) справедливо для всех t и τ , а не только для $t \geq \tau$. Поэтому уравнение (2.11) описывает обратимую динамическую систему. Другими словами, линейность вместе с гладкостью обеспечивают обратимость системы.

(2.12) **Замечание.** В соответствии с этими двумя теоремами каждый раз, когда речь идет о конечномерных линейных гладких системах, все расчеты, доказательства и т. п. можно основывать непосредственно на соотношениях (2.9). Это позволит нам воспользоваться мощным аппаратом прикладной математики, основанным на математическом анализе и теории дифференциальных уравнений (см. гл. 3—5). Однако не следует забывать, что используемые методы имеют в конце концов второстепенное значение. Важно то, что наши результаты есть следствия предположений о «конечномерности, линейности и гладкости». Применяемые здесь методы прикладной математики, возможно, заменятся в будущем какими-либо другими, более эффективными, но крайне мало вероятно, чтобы в ближайшем будущем удалось найти класс систем, позволяющих строить более простые или более полезные модели физических объектов.

В оставшейся части этого параграфа мы будем опускать прилагательные «динамическая», «конечномерная» и «гладкая», считая их присущими системе, когда для нее используется термин «линейная».

(2.13) **Определение.** Событие (τ, x) для линейной системы Σ называется *достижимым (из начала координат)* тогда и только тогда, когда найдется такое $s \leq \tau$ и такое входное воздействие ω , что оно переводит систему из состояния $(s, 0)$ в состояние (τ, x) .

Отметим, что как s , так и ω могут зависеть и от τ , и от x . В силу причинности системы функцию ω достаточно определить лишь на множестве $[s, \tau]$.

Изменив ориентацию во времени, получим точный аналог понятия достижимости.

(2.14) **Определение.** Событие (τ, x) для линейной системы Σ называется *управляемым (относительно начала координат)* тогда и только тогда, когда найдется такое $t \geq \tau$ и такое входное воздействие ω , которое переведет систему из состояния (τ, x) в состояние $(t, 0)$.

Система Σ называется *полностью достижимой (или полностью управляемой)* в момент времени τ тогда и только тогда, когда каждое событие (τ, x) , где τ фиксировано, а $x \in X$, является достижимым (или управляемым). Если же момент времени τ не упоминается, то эти свойства должны выполняться для всех τ .

(2.15) **Замечание.** (Будьте внимательны!) Даже если линейная система полностью достижима и полностью управляема, отсюда еще не следует, что каждое событие (τ, x) можно преобразовать в любое другое событие (τ_1, x_1) , $\tau_1 \geq \tau$, с помощью подходящего выбора ω . Для выполнения этого достаточное условие выглядит следующим образом: найдется такое $\tau_2 \in [\tau, \tau_1]$, что одновременно $\tau_2 = t_\tau$, $x = s_{\tau_1, x_1}$.

Наше определение управляемости построено таким образом, чтобы оно описывало очевидные необходимые и достаточные условия существования регулятора. Напомним задачу (1.6): цель регулятора состоит в том, чтобы перевести систему Σ из произвольного начального состояния x в некоторое требуемое состояние x^* , обычно совпадающее с началом координат. Поэтому как только мы найдем явный критерий полной управляемости, то в определенном смысле можно считать, что мы решили математическую часть (вопрос существования) задачи конструирования регулятора.

Удобный общий критерий управляемости [Калман, 1960a] имеет следующий вид.

(2.16) **Теорема.** Событие (τ, x) линейной системы Σ управляемо тогда и только тогда, когда при некотором t состояние x принадлежит области значений линейного преобразования

$$W(\tau, t) = \int_{\tau}^t \Phi(\tau, \sigma) G(\sigma) G'(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) d\sigma.$$

Здесь штрихом отмечен сопряженный оператор или транспонированная матрица.

(2.17) **Замечание.** Если $W(\tau, t)$ имеет максимальный ранг при некотором τ и любых t , то система Σ полностью управляема.

(2.18) **Замечание.** Ранг матрицы $W(\tau, t)$ не убывает с расширением области интегрирования. Для того чтобы убедиться в этом,

напомним, что, согласно результатам линейной алгебры, матрица A является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда существует такая матрица B , что $A = BB'$. Но так как подинтегральная функция в правой части равенства теоремы (2.16) неотрицательно определенная, то это справедливо и относительно самого интеграла. Поэтому $\text{rank } W(\tau, t) \leq n$ не убывает при $t \rightarrow \infty$ или $\tau \rightarrow -\infty$ и $\text{rank } W(\tau, t) \leq n$. Отсюда следует, что при заданном τ найдется некоторое $t_1 = t_1(\tau)$, такое, что $\text{rank } W(\tau, t)$ постоянен при всех $t > t_1(\tau)$. Это значит, что в конечномерной линейной системе либо некоторое событие (τ, x) неуправляемо, либо все события (τ, x) можно преобразовать в $(t_1(\tau), 0)$.

(2.19) **Замечание.** В случае линейной системы общего вида интеграл из теоремы (2.16) нельзя вычислить аналитически, и с практической точки зрения его можно рассматривать лишь как рецепт для численного определения управляемости. С теоретической же точки зрения этот результат чрезвычайно полезен для получения явных критериев управляемости для различных частных случаев.

Доказательство теоремы (2.16). Вид оператора W связан с применением методов вариационного исчисления. На самом деле для управления ω известно явное выражение, зависящее от W и преобразующее (τ, x) в $(t, 0)$ оптимальным образом; здесь x принадлежит области значений оператора $W(\tau, t)$. Подробности имеются в работе Калмана, Хо и Нарендра [1963].

Простое непосредственное доказательство теоремы (2.16) состоит в следующем.

Достаточность. Предположим, что x принадлежит области значений оператора $W(\tau, t)$ при некотором t , т. е. $x = W(\tau, t)z_x$, где $z_x \in X$. Определим $\omega_x: \sigma \mapsto u_x(\sigma)$ таким образом, чтобы

$$(2.20) \quad u_x(\sigma) = -G'(\sigma)\Phi'(\tau, \sigma)z_x, \quad \sigma \in [\tau, t].$$

Подставим теперь это выражение в определение Φ (см. уравнение (2.11)) и убедимся в том, что

$$\Phi(t; \tau, x, \omega_x) = 0.$$

С этой целью нам придется воспользоваться *полугрупповым свойством* переходных отображений

$$(2.21) \quad \Phi(t, \sigma) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, \sigma),$$

где последнее равенство справедливо при любых вещественных σ, τ и t вследствие единственности решений дифференциального уравнения (2.5), определяющего Φ . Заметим, что уравнение (2.21) представляет собой линейный вариант аксиомы (1.1d3) из § 1.1.

Отметим также, что Φ не может быть вырожденным. Действительно, согласно уравнению (2.21),

$$(2.22) \quad \Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t).$$

Необходимость. Напомним, что, согласно одному из результатов линейной алгебры, пространство X можно представить в виде прямой суммы области значений оператора W и ядра оператора W :

$$X = \text{range } W \oplus \ker W.$$

(Это справедливо для любого симметричного оператора, отображающего любое конечномерное векторное пространство в себя.) Если событие (τ, x) неуправляемо, то состояние $x = (x_1, x_2)$ должно иметь составляющую $x_2 \neq 0$ из ядра оператора W . Если (τ, x_2) управляемо, то в силу линейности системы каждое событие вида $(\tau, x_1 + x_2)$, где x_1 принадлежит области значений оператора W , будет также управляемо. Поэтому достаточно показать, что некоторый ненулевой вектор, принадлежащий ядру оператора W , является неуправляемым.

Предположим, таким образом, что $x_2 \neq 0$ принадлежит ядру оператора $W(\tau, t)$ при некотором t и что $\omega_2 \in \Omega$ преобразует (τ, x_2) в $(t, 0)$. Тогда

$$x_2' W(\tau, t) x_2 = \int_{\tau}^t \|G'(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) x_2\|^2 d\sigma = 0.$$

Поскольку подынтегральная функция в этом уравнении неотрицательна и непрерывна, то

$$(2.23) \quad G'(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) x_2 \equiv 0 \text{ на } [\tau, t].$$

С другой стороны,

$$\Phi(t, \tau) x_2 + \int_{\tau}^t \Phi(t, \sigma) G(\sigma) u_2(\sigma) d\sigma = 0,$$

и, если воспользоваться выражением (2.20), имеем

$$\int_{\tau}^t \Phi(\tau, \sigma) G(\sigma) u_2(\sigma) d\sigma = -x_2.$$

Умножая последнее уравнение на x_2' , получаем, что

$$x_2' \int_{\tau}^t \Phi(\tau, \sigma) G(\sigma) u_2(\sigma) d\sigma = -x_2' x_2 = -\|x_2\|^2.$$

Но в силу уравнения (2.23) левая часть этого уравнения равна нулю и, следовательно, $\|x_2\|^2 = 0$, а это противоречит предположению о том, что $x_2 \neq 0$.

Рекомендуем читателю доказать справедливость аналогичного критерия достижимости события (τ, x) , т. е. следующую теорему.

(2.24) **Теорема.** Событие (τ, x) для линейной системы Σ достижимо тогда, и только тогда, когда при некотором s состояние x принадлежит области значений оператора $\hat{w}(s, \tau)$, где

$$\hat{W}(s, \tau) = \int_s^{\tau} \Phi(\tau, \sigma) G(\sigma) G'(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) d\sigma.$$

(2.25) **Пример.** Рассмотрим периодическую линейную систему (в которой $F(t)$ и $G(t)$ — периодические функции t). Согласно теореме Флоке¹⁾, переходное отображение можно представить в виде

$$\Phi(t, \tau) = P(t) e^{(t-\tau)Q} P^{-1}(\tau),$$

где Q — постоянная матрица размера $n \times n$, а $P: T \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times n\}$ есть невырожденная непрерывная периодическая функция t . Более того, поскольку Φ невырождено, P невырождено при любом t .

Оператор W для рассматриваемой системы не обязательно является периодическим. Однако легко доказать, что его ранг достигает своего максимума в течение одного периода. Другими словами, справедливо следующее предложение.

(2.26) **Предложение.** Если периодическая линейная система полностью управляема, то систему из любого состояния можно перевести в начало координат за время, не большее периода системы.

Если система Σ всего лишь почти-периодическая или квазипериодическая, то теорема Флоке уже неверна, и выводы, относящиеся к рангу оператора W , не имеют прежней силы. Поэтому даже в этом «несколько» отличном случае аналитическое вычисление $t_1(\tau)$ (см. замечание (2.18)) становится нетривиальной задачей.

2.3 Стационарные линейные системы

В «классической» теории управления практически всегда рассматривались объекты, которые были не только линейными, но и стационарными. Интуитивно ясно, что *стационарной* (с постоянными коэффициентами) динамической системой можно назвать такую систему, определяющие свойства которой (переходная функ-

¹⁾ См. § 5 гл. 3 книги Коддингтона и Левинсона [1955]. Читателю придется перевести приведенные там результаты на язык обозначений, принятых здесь.

ция и выходное преобразование) не зависят от начального момента времени. Из гл. 1 (определение (1.2)) и теоремы (2.8) предыдущего параграфа мы сразу получаем следующий явный критерий стационарности системы.

(3.1) Предложение. *Линейная система Σ является стационарной тогда и только тогда, когда все матрицы F , G и H не зависят от времени.*

Ясно, что стационарная линейная система Σ эквивалентна системе уравнений

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = Fx + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t),$$

где матрицы F , G и H постоянны.

В двух последующих параграфах, называя систему «линейной», мы будем предполагать, что она не только «динамическая», «конечномерная» и «гладкая», но также и то, что она «стационарная». Такое весьма безответственное отношение к терминологии укоренилось по крайней мере в технической литературе по управлению.

(3.3) Замечание. Очень часто нам приходится предполагать, что объект стационарен (хотя бы на достаточно коротком промежутке времени), поскольку в противном случае нам вообще не удалось бы построить его модель: в произвольной нестационарной системе наблюдения за прошлым поведением системы могут ничего не говорить о ее будущем.

Напомним, что матрица перехода для (стационарной) линейной системы удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Phi(t, \tau) = \exp(t - \tau) F = e^{(t-\tau)F} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^k F^k}{k!}.$$

Матричная экспоненциальная функция $e^{(t-\tau)F}$ вполне определена (приведенный степенной ряд абсолютно сходится) при любых t , τ и F (см. § 1 гл. 3 книги Коддингтона и Левинсона [1955]). Обозначение $e^{(t-\tau)F}$ сразу, по крайней мере на интуитивном уровне, убеждает нас в справедливости соотношений (2.21) и (2.22).

Для (стационарной) линейной системы имеется очень простой критерий полной управляемости.

(3.4) Теорема. *Линейная n -мерная система Σ полностью управляема тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank } C = \text{rank} [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n.$$

Здесь C есть матрица размера $n \times mn$, составленная из столбцов матриц $G, FG, \dots, F^{n-1}G$.

(3.5) **Следствие.** Если линейная система Σ полностью управляема, то для любых τ , x и $\varepsilon > 0$ найдется такое входное воздействие ω , которое преобразует (τ, x) в $(\tau + \varepsilon, 0)$.

(3.6) **Следствие.** Если ранг матрицы равен $G = r$, то критерий полной управляемости упрощается и принимает вид

$$\text{rank } C = \text{rank} [G, FG, \dots, F^{n-r}G] = n.$$

Все эти результаты по самой своей сути алгебраические. Все они взаимосвязаны. Еще одно интересное следствие опирается на следующее определение.

(3.7) **Определение.** Характеристическим многочленом χ_F квадратной матрицы F называется многочлен $\det(zI - F)$. Минимальным многочленом ψ_F матрицы F называется нормированный (с равным 1 коэффициентом при старшем члене) многочлен наименьшей степени, для которого $\psi_F(F) = 0$.

Напомним, что, согласно теореме Кэли — Гамильтона (Гантмахер [1953]), имеем $\chi_F(F) = 0$. Напомним еще, что ψ является делителем любого многочлена, аннулирующего для матрицы F , так что $\psi_F | \chi_F$ (т. е. „ ψ_F — делитель χ_F “). Тогда справедливо еще одно следствие.

(3.8) **Следствие.** Если для заданного F существует такое G единичного ранга, что пара $\{F, G\}$ полностью управляема, то $\chi_F = \psi_F$.

В прошлом веке такую матрицу F обычно называли *неразрушающей*. На современном же языке мы скажем, что линейное отображение $F: X \rightarrow X$ циклично, т. е. существует такой вектор g , что множество $\{g, Fg, \dots\}$ порождает X . Это, очевидно, аналогично нашему критерию управляемости.

Доказательство теоремы (3.4). Достаточность. В силу стационарности без потери общности можно предположить, что $\tau = 0$. Если Σ не является полностью управляемой, то в соответствии с доказательством теоремы (2.16) (см. формулу (2.23)) найдется такой вектор $x \neq 0$, что $x' \Phi(0, t) G \equiv 0$ при всех $t \geq 0$. Дифференцируя это соотношение один раз, два раза и т. д. по t и затем полагая $t = 0$, получаем, что

$$x'G = 0, \quad x'FG = 0, \quad \dots$$

Таким образом, вектор $x \neq 0$ оказывается ортогональным любому элементу матрицы

$$C = [G, \dots, F^{n-1}G],$$

и мы имеем противоречие, если ранг матрицы C равен n ,

Необходимость. Предположим, что ранг матрицы C меньше n . Тогда найдется такой вектор $q \neq 0$, принадлежащий X , что

$$q'G = 0, \quad q'FG = 0, \quad \dots, \quad q'F^{n-1}G = 0.$$

Но, согласно теореме Кэли — Гамильтона, имеем $q'F^nG = 0$ и по индукции находим $q'F^pG = 0$ при всех $p \geq 0$. Напомним, что если система Σ стационарна и линейна, то переходное отображение можно представить в виде ряда

$$\Phi(0, t) = e^{-tF} = I - tF + \frac{t^2 F^2}{2!} - \dots$$

Отсюда следует, что $q'e^{-tF}G \equiv 0$. Соотношение

$$0 = \varphi(t; \tau, x, \omega) = e^{(t-\tau)F}x + \int_{\tau}^t e^{(t-\sigma)F}Gu(\sigma) d\sigma$$

требует, чтобы

$$0 = x + \int_{\tau}^t e^{(\tau-\sigma)F}Gu(\sigma) d\sigma,$$

но этого не может быть, если $q'x \neq 0$. Поэтому если ранг матрицы C меньше n , то всегда найдется неуправляемое состояние $x \neq 0$.

Доказательство следствия (3.5). Здесь достаточно показать, что каждый раз, когда $t > \tau$ и ранг матрицы C равен n , матрица $W(\tau, t)$ положительно определена. Действительно, если существует такое $x \neq 0$, что

$$0 = x'W(\tau, t)x = \int_{\tau}^t \|G'e^{(\tau-\sigma)F}x\|^2 d\sigma,$$

то

$$x'e^{\sigma F}G \equiv 0 \quad \text{на } [t - \tau, 0],$$

что противоречит предположению $\text{rank } C = n$. Последнее доказывается так же, как и при доказательстве достаточности условий теоремы (3.4).

Доказательство следствия (3.6) опирается на следующую лемму.

(3.9) **Лемма.** Если q — такое целое, что

$$\text{rank}[G, FG, \dots, F^{q-1}G] = \text{rank}[G, FG, \dots, F^qG] = r,$$

то

$$\text{rank}[G, FG, \dots, F^pG] = r \quad \text{при всех } p \geq q^{-1}.$$

Доказательство. Утверждение

$$\text{rank}[G, \dots, F^{q-1}G] = \text{rank}[G, \dots, F^qG]$$

означает, что каждый столбец матрицы $F^q G$ линейным образом зависит от столбцов матриц $G, \dots, F^{q-1} G$. Отсюда каждый столбец $F^{q+1} G$ линейно зависит от столбцов $FG, \dots, F^q G$. Продолжая по индукции, мы получаем утверждение леммы.

Доказательство следствия (3.6). В силу леммы (3.9) ранг матрицы C должен увеличиваться по мере добавления каждого нового члена по крайней мере на 1 до тех пор, пока не будет достигнут максимальный ранг n . Если ранг матрицы C равен r , то будет достаточно добавить не более $(n-r)$ членов $FG, \dots, F^{n-r} G$ с тем, чтобы убедиться, можно ли достичь максимального ранга n матрицы C или нет (естественно, что, согласно теореме Кэли — Гамильтона, нам никогда не придется рассматривать матрицу, большую чем $[G, \dots, F^{n-1} G]$).

Доказательство следствия (3.8). Поскольку полином χ_F нормирован и $\psi_F | \chi_F$, нам нужно лишь показать, что $\delta \chi_F = \delta \psi_F$, где δ есть степень многочлена. Но так как $\psi_F(F) G = 0$, предположение $\delta \psi_F < n$ противоречит критерию управляемости (3.6) при $r = 1$.

(3.10) Замечание. Следствие (3.5) может оказаться неожиданным для тех, кто стоит на позициях правоверного практицизма, поскольку известно, что состояние реальных систем нельзя изменить за произвольно малое время, каким бы большим ни было входное воздействие. Но эта «трудность» относится не к теории, а к ее приложениям. Для того чтобы иметь возможность управлять системой за произвольно малое время, необходимо уметь с произвольно малой ошибкой определять матрицы F и G . На самом деле доказательство соответствующей теоремы опирается на (неявное) предположение о том, что эти матрицы известны *точно*. В том же случае, когда мы переходим к применению теории, нам нужно, конечно, побеспокоиться о том, в какой степени поведение динамической системы, используемой в качестве модели, совпадает с поведением реального физического объекта.

(3.11) Замечание. Необходимо иметь в виду, что теорема (3.4) дает лишь двузначный ответ на вопрос о полной управляемости системы. Но во многих практических ситуациях нужно также иметь количественную оценку относительной простоты или трудности управления. В случае полной управляемости с этой целью мы можем использовать абсолютные значения определителей размера $n \times n$ матрицы $[G, \dots, F^{n-1} G]$. Менее искусственный подход к вопросу может заключаться в исследовании энергии управляющих воздействий ω , необходимых для перевода системы из заданного состояния в начало координат. Это приводит к понятиям теории оптимального управления, причем естественный критерий управляемости, оказывается, совпадает с содержанием теоремы (2.16).

Эта задача подробно рассматривается в работе Калмана, Хо и Нарендра [1963].

(3.12) **Замечание.** Более глубокое значение теоремы (3.4) заключается в том, что она устанавливает связь между структурными свойствами системы Σ (отражающимися на алгебраических свойствах пары матриц $\{F, G\}$) и возможностями управления системы Σ .

Доказательство двух приведенных ниже следствий может быть получено по уже известной схеме и предлагается читателю в качестве упражнений.

(3.13) **Следствие.** Для стационарной линейной системы

$$\dim \text{range } W(\tau, t) = \text{rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G]$$

при всех $t > \tau$.

(3.14) **Следствие.** Управляемые состояния стационарной линейной системы образуют F -инвариантное подпространство, являющееся наименьшим таким подпространством, содержащим все вектор-столбцы матрицы G .

Согласно следствию (3.13), для стационарной системы теорема (2.16) об управляемости и теорема (2.24) о достижимости совпадают. Это утверждение, а также возможности произвольного сдвига начального момента времени вместе с утверждением (3.5) позволяют прийти к следующему выводу.

(3.15) **Теорема.** В стационарной линейной системе Σ каждое событие управляемо тогда и только тогда, когда оно достижимо. Если $t_2 > t_1$ и система Σ полностью управляема, то за счет подходящего выбора входного воздействия ω любое событие (t_1, x_1) для Σ можно преобразовать в любое другое событие (t_2, x_2) .

До сих пор мы рассматривали состояние системы как некоторую абстрактную величину, т. е. абстрактный вектор конечномерного векторного пространства. Другими словами, полученные выше результаты не зависят от конкретного выбора системы координат, позволяющего представлять абстрактные векторы, хотя и оказалось удобнее формулировать наши критерии на языке матриц, а не на языке абстрактных линейных преобразований. Однако известные ситуации, в которых подходящий выбор базиса приводит к интересным результатам. При этом в определенном смысле мы жертвуем общностью (не зависящими от выбора системы координат результатами) в обмен на вычислительные удобства (матрицы, с которыми мы будем иметь дело, имеют меньше элементов). Советуем читателю познакомиться с книгой Халмоша [1958], в которой дано прекрасное сопоставление «бескоординатной» и «координатной» точек зрения.

Рассуждения и результаты § 2.2 и 2.3 остаются справедливыми с необходимыми изменениями и для линейных систем с дискретным временем. Нестационарные системы с дискретным временем малоинтересны, поскольку единственным средством изучения таких систем оказываются различные предположения о гладкости зависимости матриц F , G и H от времени. Напротив, случай стационарных систем с дискретным временем представляет значительную ценность. Отметим поэтому здесь без доказательства два основных факта.

(3.16) **Теорема.** *Конечномерная линейная стационарная система Σ с дискретным временем эквивалентна системе уравнений*

$$(3.17) \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t),$$

где матрицы F , G и H постоянны, а t целое.

Этот результат можно получить подобно теореме (2.8). Конечно, читатель, не интересующийся вопросами аксиоматики, волен принять уравнения (3.17) за определения *линейной* (конечномерной и стационарной) *системы с дискретным временем*; как и раньше, мы станем опускать прилагательные «конечномерная» и «стационарная».

(3.18) **Теорема.** *Линейная n -мерная система Σ с дискретным временем полностью достижима тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank } C = \text{rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n,$$

где $r = \text{rank } G$.

(3.19) **Замечание.** Этот критерий соответствует следствию (3.6), но, так как теорема (3.15) не справедлива для систем с дискретным временем, если $\det F = 0$, нам пришлось сформулировать результат (3.18) в виде критерия достижимости, а не управляемости. Однако в самом общем случае по-прежнему справедливо, что

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{управляемых состояний} \end{array} \right\} \supset \left\{ \begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{достижимых состояний} \end{array} \right\}.$$

(3.20) **Замечание.** Весьма интересно, что алгебраическая форма теоремы (3.18) и следствия (3.6) одна и та же, хотя физический смысл матриц F и G в уравнениях (3.2) и (3.17) совершенно различен. (В качестве упражнения предлагаем найти уравнения системы с дискретным временем, соответствующей системе (3.2), полагая, что t из уравнения (2.11) принимает лишь целочисленные значения.) Поэтому заманчивым кажется забежать вперед и высказать гипотезу, согласно которой основы теории линейных систем по самой своей сути являются алгебраическими, независимо от дискретности или непрерывности времени. Эта гипотеза рас-

сма­три­ва­ет­ся в гл. 6 и при­об­ре­та­ет за­вер­шен­ные очертания в гл. 10. В дей­стви­тель­но­сти имен­но те­о­ре­мы (3.4)—(3.6) и (3.18) яв­ля­ют­ся ос­нов­ной при­чи­ной при­в­ле­че­ния по­ня­тия мо­ду­ля в те­о­рию ли­ней­ных си­стем, что и со­став­ля­ет ос­нов­ное со­дер­жа­ние гл. 10.

2.4 Замена координат и канонические формы

Сейчас мы хотим получить явные формулы, описывающие влияние изменения базиса в пространстве X_Σ на значения параметров, определяющих систему Σ .

Станем рассматривать вектор состояний x как n -членную последовательность (n -ку) чисел, играющих роль координат (абстрактного) вектора x относительно некоторого фиксированного базиса в пространстве состояний X . Соответственно нам нужно рассматривать F и G как матрицы, описывающие абстрактные линейные преобразования F и G относительно того же базиса в пространстве X . Нас не будут интересовать изменения базиса в пространстве U , так как он обычно задан явным образом физическими соображениями. В то же время для пространства X такого «естественного» базиса не существует, поскольку практически всегда состояние системы придется рассматривать как некую абстрактную величину, лишенную конкретного физического содержания. (Возможно, что единственный случай, в котором состояния имеют естественное физическое содержание, это случай классической механики, где составляющими вектора состояния являются координаты и импульсы частиц.)

Замена координат представляет собой некоторое невырожденное линейное преобразование $A: x \mapsto \hat{x} = Ax$ (числового) вектора состояний. В матричных обозначениях это можно записать так:

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \dots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Преобразование A вызывает преобразование матриц F и G , описываемое формулами

$$(4.2) \quad \hat{G} = AG, \quad \hat{F}A = AF.$$

Рассмотрим следующую задачу. Даны две пары матриц $\{F, G\}$ и $\{\hat{F}, \hat{G}\}$, соответствующих одной и той же полностью управляемой системе Σ , но при различных базисах в пространстве X . Выясним, как определить матрицу A в явном виде. Многократно используя соотношение (4.2), мы получаем

$$\hat{G} = AG, \quad \hat{F}\hat{G} = AFA^{-1}AG = AFG, \dots,$$

так что в силу соотношений (4.2) и (3.6) имеем

$$(4.3) \quad [\hat{G}, \hat{F}\hat{G}, \dots, \hat{F}^{n-r}\hat{G}] = A[G, FG, \dots, F^{n-r}G],$$

где $r = \text{rank } G$. Если $m = 1$ (матрица G состоит из одного столбца, т. е. у системы всего один вход), то $0 \leq r \leq m = 1$. В то же время $r > 0$, так как в случае $r = 0$ имеем $G = 0$, и система Σ безусловно не может быть полностью управляемой. Поэтому $r = 1$. В этом частном случае матрицы в (4.3) квадратные. Они невырождены (по (3.6)), так как известно, что Σ полностью управляема. Отсюда находим

$$(4.4) \quad A = [\hat{g}, \hat{F}\hat{g}, \dots, \hat{F}^{n-1}\hat{g}][g, Fg, \dots, F^{n-1}g]^{-1},$$

где мы обозначили через g матрицу G размера $n \times 1$.

В общем случае $r > 1$ эта формула становится бессмысленной, так как для неквадратных матриц не определены обратные. Поэтому в данном случае построим $C = [G, \dots, F^{n-r}G]$ и $D = CC'$. Теперь матрица D квадратна порядка n и невырождена в силу условия (3.6) (это построение можно сравнить с определением W из теоремы (2.16)). Таким образом, поскольку из равенства $AC = \hat{C}$ следует $ACC' = AD = \hat{C}C'$, получаем $A = \hat{C}C'D^{-1}$. Отметим, что матрица $C'(CC')^{-1}$ представляет собой одну из обобщенных матриц для C .

Подводя итог, сформулируем следующую теорему.

(4.5) **Теорема.** Если полностью управляемая n -мерная линейная система Σ описывается относительно различных базисов в пространстве X парами матриц $\{F, G\}$ и $\{\hat{F}, \hat{G}\}$, то невырожденная матрица A , определяющая преобразование координат $\hat{x} = Ax$, порожденное переходом от одного базиса к другому, может быть вычислена по формуле

$$A = [\hat{G}, \dots, \hat{F}^{n-r}\hat{G}][G, \dots, F^{n-r}G]' \times \\ \times \{[G, \dots, F^{n-r}G][G, \dots, F^{n-r}G]\}^{-1},$$

где $r = \text{rank } \hat{G} = \text{rank } AG = \text{rank } G$.

(4.6) **Следствие.** Матрица A единственна.

Доказательство. Если не привязываться к каким-либо системам координат, то этот результат сразу становится очевидным: два различных базиса конечномерного векторного пространства всегда связаны друг с другом единственным линейным преобразованием.

Не менее просто и непосредственное доказательство. Пусть A и B — две матрицы, преобразующие $\{F, G\}$ в $\{\hat{F}, \hat{G}\}$. Воспользовав-

Поэтому $\{e_1, \dots, e_n\}$ образует базис в пространстве X , так как в силу утверждения (3.6) для случая $r=1$ базисом является $\{g, \dots, F^{n-1}g\}$. В том же, что F имеет приведенный выше вид, можно убедиться непосредственно, вычисляя Fe_n, \dots, Fe_2 ; в частности, $Fe_1 = -\alpha_n e_n$ следует из того, что $\chi_F(F) = 0$ (теорема Кэли — Гамильтона).

(4.10) **Определение.** Матрицы (4.9) называются *каноническим представлением* матриц $\{F, g\}$.

(4.11) **Замечание.** Поскольку многочлен χ определяет матрицу F из уравнения (4.9), матрица F была известна раньше как *сопровождающая матрица* многочлена χ . Однако это неудачный термин, так как сопровождающими для χ можно с равным основанием считать и некоторые другие матрицы, например матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix},$$

которая будет играть важную роль ниже. Пока же лишь отметим, что матрица F из (4.9) единственным образом определяется многочленом χ_F и особым базисом $\{e_i\}$.

(4.12) **Упражнение.** Убедитесь в том, что $\det(zI - F) = \chi_F(z)$, т. е. χ_F действительно является характеристическим многочленом матрицы F из (4.9).

(4.13) **Замечание.** Появление канонических представлений тесно связано с известным приемом перехода от одного дифференциального уравнения n -го порядка

$$(4.14) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_n y = u(t),$$

(где r и y — скаляры, α_i — постоянны) к системе из n уравнений первого порядка

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\alpha_n x_1 - \dots - \alpha_1 x_n + u(t). \end{aligned}$$

Матричное описание системы (4.15) как раз совпадает с парой $\{F, g\}$, приведенной в (4.9). Переход от уравнения (4.14) к

уравнениям (4.15) осуществляется в результате введения переменных состояния по формулам

$$(4.16) \quad x_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обычный переход к уравнениям (4.15), намеченный только что, вообще говоря, неудовлетворителен. Наш подход, приведенный выше, существенно точнее по крайней мере в трех отношениях (ими часто пренебрегают или неправильно их интерпретируют).

1. Это вопрос о том, является ли система (4.14) полностью управляемой (вопрос впервые глубоко обсуждали Калман, Хо и Нарендра [1963]).

2. Иногда считают, что преобразование (4.16) является *единственным*, позволяющим преобразовать уравнение (4.14) в уравнение, описывающее поведение системы «в пространстве состояний». Но это неверно. Система Σ , для которой минимальная реализация преобразования вход — выход $u(\cdot) \mapsto y(\cdot)$ описывается дифференциальным уравнением

$$(4.17) \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m \beta_i \frac{d^i u}{dt^i}, \quad m < n, \alpha_0 = 1,$$

полностью управляема, и поэтому она также приводима к своей канонической форме (4.15). В этом случае разница между системами (4.14) и (4.17) отражается на виде H (см. теорему (3.16)). В первом случае

$$y = x_1, \quad H = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

а во втором (см., например, § 8 работы Калмана [1963с])

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i x_{i+1}, \quad H = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}].$$

3. Соотношения (4.16), описывающие переменные состояния в зависимости от производных выходной величины, хорошо подходят для системы (4.14), но в общем случае не выполняются. Они не пригодны, например, для уравнения (4.17). Короче говоря, здесь важно каноническое представление системы управления, а не конкретные соотношения (4.16).

(4.18) **Замечание.** Как мы увидим в следующем параграфе, теорема (4.8) перекидывает удобный мостик между современной теорией управления и классической задачей конструирования регуляторов. Дело обстоит далеко не так просто, когда G имеет более одного столбца, т. е. когда у системы Σ более одного входа. В этом общем случае не существует простого канонического представления, аналогичного представлению (4.9). Интересно

отметить, что соответствующая задача в классической теории управления (конструирование регуляторов с несколькими входами) никогда не была решена удовлетворительным образом. Действительно, для синтеза таких систем не известно *общего* алгоритма. Однако с точки зрения современной теории управления каноническое представление (4.9) связано всего лишь с соображениями удобства. Основным же остается вопрос о полной управляемости, который для заданной системы решается положительно или отрицательно независимо от существования каких-либо канонических представлений.

2.5 Понятие закона управления

Теперь мы готовы к тому, чтобы использовать наши абстрактные соображения об управляемости для решения (математической) задачи конструирования системы управления. Решать эту задачу можно различными способами, так как имеется много систем управления, способных выполнить более или менее одинаковое задание. Как уже подчеркивалось выше, мы сосредоточим внимание на регуляторах простейшего вида. Здесь мы покажем, что современная теория управления приводит к результатам, которые согласуются с выводами классической теории управления, но при этом они проще получаются и легче интерпретируются.

Центральную роль играет понятие «обратной связи», которое можно формально определить следующим образом.

(5.1) Определение. Рассмотрим произвольную динамическую систему Σ . *Законом управления* называется отображение $k: T \times X \rightarrow U$, ставящее в соответствие каждому состоянию $x(t)$ и каждому моменту времени t значение $u(t) = k(t, x(t))$ входного воздействия в этот момент времени. Другими словами, значение входного воздействия в каждый момент времени зависит лишь от состояния системы $x(t)$ в этот момент времени, а также, возможно, от t . При этом другие параметры Σ могут влиять на конкретный характер функции k .

Принцип, согласно которому входные воздействия должны вычисляться через состояния системы, был четко сформулирован в середине 50-х годов Ричардом Беллманом, указавшим на его первостепенную важность. *В этом принципе заключена наиболее важная идея теории управления.* На самом деле это научная интерпретация великого открытия, известного под названием «обратной связи» и составляющего основу всей автоматики.

Утверждение, что описание объекта в пространстве состояний представляет собой естественную основу для постановки и решения задач управления, убедительно подтверждается следующими результатами. Главное здесь, конечно, то, что в текущем состоянии

системы содержится вся информация, необходимая для определения требуемого управляющего воздействия, поскольку (по определению динамической системы) будущее поведение объекта полностью определяется его нынешним состоянием и будущими управляющими воздействиями.

(5.2) **Замечание.** Не очевидно, что заданный закон управления k определяет входное воздействие $\omega: T \rightarrow U$, принадлежащее пространству входных воздействий Ω_Σ системы Σ . Трудность заключается в том, что k определяет ω лишь неявным образом через соотношение

$$\omega: t \mapsto u(t) = k(t, \varphi(t; \tau, x, \omega)).$$

Совсем не ясно, существует ли решение этого уравнения, так как не ясно, какие ограничения нужно наложить на k , чтобы гарантировать величине ω достаточную гладкость и принадлежность классу Ω_Σ (а это необходимо для того, чтобы ω можно было подставить в φ). Таким образом, мы не свободны в выборе k , а связаны неявными ограничениями, вытекающими из свойств Ω_Σ .

К счастью, это неприятное техническое препятствие устраняется в наиболее важном частном случае, когда система Σ линейная конечномерная и гладкая, пространство Ω_Σ образовано непрерывными вещественными функциями, а

k линейно по x и непрерывно по t .

Последнее допущение позволяет записать функцию k в виде

$$k(t, x) = K(t)x,$$

где $K: T \rightarrow \{\text{матрицы размера } m \times n\}$. Подставляя это управление $u(t)$ в уравнение (2.9), получаем уравнение свободной системы

$$\frac{dx}{dt} = [F(t) - G(t)K(t)]x,$$

которое имеет вполне определенное единственное решение для каждого события (τ, x) , поскольку все матрицы F , G и K предполагаются непрерывными по t . Более того, переходная матрица этого уравнения также непрерывна по t , т. е. $\Phi(\cdot, \tau)x \in C^0(T \rightarrow X)$. А так как

$$\omega: t \mapsto u(t) = K(t)\Phi(t, \tau)x,$$

где $\omega \in C^0$, то, следовательно, $\omega \in \Omega_\Sigma$ при любом выборе K .

При сделанных выше предположениях решение задачи синтеза закона управления почти сразу получается из теоремы (2.16). На интуитивном уровне это выглядит следующим образом. Поскольку уравнение (2.20) определяет правильное входное воздействие как

функцию состояния лишь при $\sigma = \tau$, мы определим $u(\sigma)$ при каждом σ , пользуясь тем же правилом. Таким образом, мы попробуем определить линейный закон управления с помощью соотношений

$$(5.3) \quad u(\sigma) = -G'(\sigma) W^\#(\sigma, t) x(\sigma) = -K(\sigma) x(\sigma), \quad \sigma \in [\tau, t],$$

где $W^\#$ (псевдообратная матрица для W) есть любое решение X матричного уравнения $WXW = W$, такое, что отображение $\sigma \mapsto X(\sigma, t)$ при каждом t является кусочно-непрерывным.

Вопрос о существовании $W^\#$ не относится к числу тривиальных (в действительности на этот вопрос не обратили внимания в работе Калмана, Хо и Нарендра [1963]). Мы определили теперь $W^\#$ с помощью следующей процедуры.

1. Зафиксируем τ и t и разобьем интервал $[\tau, t]$ на непересекающиеся подинтервалы, покрывающие интервал, таким образом, чтобы $\text{rang } W(\cdot, t) = \text{const}$. Поскольку при $\sigma \rightarrow \tau$ ранг матрицы $W(\sigma, t)$ монотонно возрастает и может принимать лишь конечное число значений, таких подинтервалов будет конечное число. Легко видеть, что каждый такой подинтервал замкнут слева и открыт справа (за исключением того случая, когда $\sigma = t$).

2. На первом из этих интервалов, скажем на $[\sigma_1, t]$, определим $W^\#(\cdot, t)$ следующим образом. Если $X = Y \oplus Z$ (т. е. представлено в виде ортогональной прямой суммы), причем W невырождена на Y и обращается в нуль на Z , то определим $W^\#$ так, чтобы $W^\#|_Y = W^{-1}$, а $W^\#|_Z = I^{-1}$.

3. Аналогичным образом определим $W^\#$ на всем множестве $[\tau, t]$. Такое $W^\#$ будет кусочно-непрерывным.

Заметим, что $\|W^\#(\sigma, t)\| \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_i$ слева. Это математическое препятствие «исчезает» после умножения $K(\sigma)$ на $x(\sigma)$ (см. уравнения (5.5) и (5.6) ниже). Однако игнорировать практические трудности, связанные с существованием неограниченных элементов K , нельзя.

Попытаемся теперь доказать, что соотношение (5.3) оправдывает наши ожидания.

(5.4) Теорема. В конечномерной линейной гладкой системе Σ входное воздействие, определенное законом управления (5.3), преобразует каждое событие (τ, x) в $(t, 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{range } W(\tau, t)$.

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы уже была доказана (теоремой (2.16)). Для доказательства достаточности нужно показать, что ω_* , определенное по правилу (5.3), совпадает

¹⁾ Здесь через $A|X$ обозначено сужение A на X .

с ω_x , определенным согласно соотношению (2.20), т. е. что

$$(5.5) \quad u_*(\sigma) = -G'(\sigma) W^\#(\sigma, t) x(\sigma)$$

и

$$(5.6) \quad u_x(\sigma) = -G'(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) z_x$$

должны совпадать при всех $\sigma \in [\tau, t]$. Подставив (5.6) в (2.11) (и воспользовавшись соотношением (2.21) несколько раз), получим явное выражение для переходной функции

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= \Phi(\sigma; \tau, x, \omega_x) = \Phi(\sigma, \tau) [W(\tau, t) - W(\tau, \sigma)] z_x = \\ &= W(\sigma, t) \Phi'(\tau, \sigma) z_x. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.5), мы увидим, что $u_*(\sigma) \equiv u_x(\sigma)$, если

$$(5.7) \quad G'(\sigma) w = C'(\sigma) W^\#(\sigma, t) W(\sigma, t) w$$

при всех σ и w (в действительности $w = \Phi'(\tau, \sigma) z_x$). Для проверки справедливости соотношения (5.7) находим

$$(5.8) \quad \int_{\sigma}^t \|G'(\rho) \Phi'(\sigma, \rho) [I - W^\#(\sigma, t) W(\sigma, t)] w\|^2 d\rho = 0.$$

Это равенство легко получить из определения W и соотношения $WW^\#W = W$. В силу непрерывности подинтегральная функция в (5.7) должна обращаться в нуль тождественно на всем интервале $[\sigma, t]$, и в частности также при $\rho = \sigma$, что и доказывает справедливость соотношения (5.7).

Таким образом, формула (5.6) дает решение задачи (2.4) в обоих случаях: и когда ω задано явным образом с помощью уравнения (2.20), и когда оно неявным образом определяется соотношением (5.3). Более того, каждый сделанный выше вывод справедлив для любого события (τ, x) .

Тождество (5.8) играет первостепенную роль. Это так называемая «лемма о псевдообратных» (см. приложение к работе Калмана [1963 b]).

(5.9) **Замечание.** Законом управления (5.3) редко пользуются на практике, так как $K(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow t$. Это объясняется чрезмерной жесткостью граничных условий, требующих, чтобы $x(t) = 0$. Исчерпывающий анализ этой ситуации связан с привлечением аппарата вариационного исчисления и по праву принадлежит теории оптимального управления.

Для нас же наиболее важный вывод из теоремы (5.4) заключается в следующем. *Возможность синтеза произвольно хорошего закона управления ограничена лишь свойствами управляемости объекта.* Если же объект конечномерный, линейный, гладкий и

стационарный, то никаких ограничений на качество управления нет, если объект к тому же и полностью управляем. Это приводит нас к довольно удивительному результату.

(5.10) **Теорема.** Пусть пара $\{F, g\}$ полностью управляема и пусть $\theta(z) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n$ есть произвольный многочлен, а $n = \dim F$. Тогда найдется такой вектор k , что $\chi_{F-gk'} = \theta$.

Насколько известно автору, эта теорема впервые была доказана Дж. Э. Бертрамом, использовавшим метод «корневого графа». В 1961 г. Р. У. Бэсс независимо сформулировал и доказал эту теорему в неопубликованных лекционных заметках. Его доказательство опиралось на линейную алгебру. С тех пор эта теорема переоткрывалась независимым образом много-много раз. То доказательство, которое мы приводим здесь (оно заимствовано из работы Калмана [1963d], где играет роль основной леммы), существенно проще многих других, опубликованных в литературе.

Доказательство. Поскольку характеристический многочлен не зависит от выбора координат, мы можем воспользоваться любым базисом для вычисления k . Воспользуемся поэтому каноническим представлением пары $\{F, g\}$, согласно уравнениям (4.9). Относительно этого базиса положим $k' = (k_1, \dots, k_n)$, где

$$\beta_i = \alpha_i + k_{n-i+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из-за специального вида вектора g матрица $F - gk'$ является сопровождающей матрицей, последняя строка которой имеет вид $(-\beta_n, \dots, -\beta_1)$. Отсюда находим $\chi_{F-gk'} = \theta$, что и требовалось доказать.

(5.11) **Обсуждение результата.** Приведенная теорема утверждает, что для полностью управляемой стационарной системы Σ с одним входом характеристические корни можно устанавливать по своему усмотрению, если допустить использование обратной связи. Это свидетельствует о чрезвычайной важности обратной связи. При помощи обратной связи можно совершенно произвольным образом определять динамику объекта с единственной оговоркой: описание объекта линейной стационарной системой должно обеспечивать точное воспроизведение поведения физического объекта. Поэтому нет необходимости в построении объекта (например, самолета или ядерного реактора) так, чтобы он сразу же обладал хорошими динамическими свойствами, — желаемые свойства можно достичь искусственно с помощью обратной связи. А это обеспечивает большую свободу конструирования и построения объекта управления.

Поскольку в настоящее время не существует удовлетворительной теории управляемости нелинейных систем, невозможно сказать, какие глобальные ограничения накладываются на управляемость нелинейными элементами объекта. Другими словами, без-

граничные потенциальные возможности обратной связи, отмеченные выше, могут быть реализованы в общем случае лишь в *локальном* (линейном) смысле.

(5.12) **Замечание.** Как уже отмечалось в § 2.1, более глубокая теория управления требует, чтобы мы *вычислили* коэффициенты усиления β_1, \dots, β_n в цепи обратной связи так, чтобы обеспечить их оптимальность в соответствии с некоторым конкретным критерием оптимальности. Такая теория развивается в § 3.5. Ее конечный вывод (следствие (5.57) гл. 3) состоит в том, что при разумных предположениях оптимизация на интервале $[0, \infty)$ приводит к строго устойчивому закону управления, т. е. что

$$(5.13) \quad \operatorname{Re} \lambda_i[F - gk'] < 0 \text{ при всех } i.^1)$$

Для упрощения последующих рассуждений мы просто станем *предполагать* ниже, что наш закон управления удовлетворяет условиям (5.13). На самом деле это не такое уж неестественное предположение. Очень часто в классической теории управления $\chi_{F-gk'}$ выбирается из интуитивных физических соображений и, естественно, так, чтобы удовлетворялось требование устойчивости (5.13). И что удивительно, получавшаяся система часто оказывалась оптимальной с точки зрения современной теории управления (см. Калман [1964]).

2.6 Определение состояний

В нашем определении закона управления неявно предполагается, что в каждый момент времени известно, в каком состоянии находится система; другими словами, все внутренние переменные объекта могут быть измерены и получены в качестве выходных величин. Однако трудно предположить, что в большинстве практических ситуаций это в самом деле так. В действительности нам всегда следует представлять себе состояние объекта как некоторую абстрактную величину, описывающую недоступимые переменные внутри объекта. Так возникает первая трудность, которую нужно преодолеть, если мы хотим воспользоваться предписанием Беллмана: *управление есть функция состояния*.

Естественное решение этой проблемы состоит в следующем. Кроме закона управления регулятор должен содержать и другой элемент, назначение которого состоит в *определении состояния* системы. Из определения динамической системы ясно, что для нахождения состояния объекта необходима информация двух различных видов.

¹⁾ Здесь через $\lambda_i[A]$ обозначены собственные числа матрицы A .

1. Необходимо знать структуру объекта, т. е. его переходное отображение, его выходное отображение и т. п.

2. Необходимо знать действительные входные воздействия и выходные величины объекта.

В этом параграфе мы попытаемся найти вычислительную схему, преобразующую данные этих двух типов для получения хорошей оценки неизвестного текущего состояния объекта.

(6.1) Замечание. В современной инженерной практике принято предполагать, что большинство данных первого типа известно априори (например, сообщается конструктором объекта), а данные второго типа получаются в результате измерений в реальном масштабе времени в процессе повседневной работы объекта. Если данные первого типа отсутствуют и должны быть каким-то образом извлечены из информации о входных воздействиях и выходных величинах (задача идентификации), то мы имеем дело с *задачей адаптивного управления*. О теории адаптивного управления много и долго говорят, но в ней очень мало сделано. В задаче неадаптивного управления (когда информация о структуре объекта имеется) предполагается, что динамические свойства объекта известны в точности, и остается «только» определить текущее состояние в каждый момент времени. А это относительно просто, так как структурные данные содержат очень большую информацию, отражающую результаты многовековых исследований в естественных науках. Машина, которая сможет обеспечить адаптивное управление произвольным объектом, сможет также заменить человека и в области научного экспериментирования и построения моделей. Мы считаем задачу адаптивного управления задачей будущего и не станем останавливаться на ней здесь.

Возвращаясь к задаче измерения состояния системы, мы неожиданно обнаружим, что она является «дуальной» по отношению к задаче управления. В этом и состоит *принцип дуальности* управления и оценки, сформулированный в работе Калмана [1960 b].

В случае конечномерных линейных систем определение понятия «дуальности» использует обычные понятия, такие, как пространство, сопряженное заданному векторному, сопряженное линейное отображение и т. п. Тем не менее достаточно строгое аксиоматическое построение понятия дуальности потребовало бы, к сожалению, более высокого уровня абстракции, чем тот, который диктуется элементарным характером этой книги. Поэтому мы ограничимся тем, что как можно быстрее получим основные результаты. При этом нам не придется пожертвовать строгостью, но читателю некоторые определения не покажутся столь же естественными, что и раньше.

Будем различать два типа задач на определение состояния системы.

1. *Задача наблюдения* связана с определением настоящего состояния $x(\tau)$ по данным о поведении выходных величин в будущем, $\{y(\sigma): \sigma \geq \tau\}$.

2. *Задача идентификации* требует определения $x(\tau)$ по данным о поведении выходных величин в прошлом $\{y(\sigma): \sigma \leq \tau_n\}$.

При этом всегда будет предполагаться, что φ , η и ω для исследуемой системы известны. В первом случае мы наблюдаем будущие эффекты настоящего состояния и пытаемся установить первопричину. Во втором случае мы пытаемся восстановить текущее состояние, не располагая полной информацией о действительных изменениях состояния.

Введем теперь некоторые основные определения, дающие абстрактные необходимые и достаточные условия разрешимости этих двух задач. Мы начнем с определений для общих систем.

(6.2) **Определение.** Два события (τ, x_1) и (τ, x_2) динамической системы Σ принадлежат одному классу наблюдения (или неразличимы в будущем) тогда и только тогда, когда

$$\eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, \omega)) = \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, \omega))$$

при всех $t \geq \tau$ и любых ω .

Аналогичную роль для второй задачи играет понятие класса идентификации.

(6.3) **Определение.** Два события (τ, x_1) и (τ, x_2) динамической системы Σ принадлежат к одному и тому же классу идентификации (или неразличимы в прошлом) тогда и только тогда, когда

$$\eta(\sigma, \varphi(\sigma; \tau, x_1, \omega)) = \eta(\sigma, \varphi(\sigma; \tau, x_2, \omega))$$

при всех $\sigma \leq \tau$ и любых ω .

Заметим, что здесь мы говорим о множестве

$$\varphi(\sigma; \tau, x, \omega) = \{\bar{x}; \varphi(\tau, \sigma, \bar{x}, \omega) = x\}.$$

Приведенные определения излишне сложны для линейного случая. В силу линейности $\varphi(t; \tau, \cdot, \cdot)$ и $\eta(t, \cdot)$ получим, что

$$\begin{aligned} \eta(t, \varphi(t; \tau, x, \omega)) &= \eta(t, \varphi(t; \tau, x, 0) + \varphi(t; \tau, 0, \omega)) = \\ &= \eta(t, \varphi(t; \tau, x, 0)) + \eta(t, \varphi(t; \tau, 0, \omega)), \end{aligned}$$

и, так как второй член справа зависит лишь от η , φ и ω , он взаимно уничтожится при вычислении следующей разности:

$$\begin{aligned} \eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, \omega)) - \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, \omega)) &= \\ = \eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, 0)) - \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, 0)) &= \\ = \eta(t, \varphi(t; \tau, x_1 - x_2, 0)). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы вновь воспользовались линейностью φ на $X \times \Omega$.

Это позволяет перефразировать наши определения следующим образом.

(6.4) **Определение.** Событие (τ, x) линейной динамической системы Σ *ненаблюдаемо* тогда и только тогда, когда оно принадлежит к классу наблюдений $(\tau, 0)$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\eta(t; \tau, x, 0) = 0$$

при всех $\sigma \leq \tau$.

(6.5) **Определение.** Событие (τ, x) линейной динамической системы Σ *неидентифицируемо* тогда и только тогда, когда оно принадлежит к классу идентификации $(\tau, 0)$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\eta(\sigma; \tau, x, 0) = 0$$

при всех $\sigma \leq \tau$.

Теперь мы приведем относительно явный критерий неидентифицируемой *линейной* системы (Калман [1960а, б]).

(6.6) **Теорема.** В конечномерной гладкой линейной динамической системе Σ событие (τ, x) *неидентифицируемо* тогда и только тогда, когда $x \in \ker M(s, \tau)$ при всех $s \leq \tau$, где

$$M(s, \tau) = \int_s^{\tau} \Phi'(\sigma, \tau) H'(\sigma) H(\sigma) \Phi(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Эта теорема является естественным дополнением теоремы (2.16). Однако ее доказательство существенно проще. Здесь нам не нужно описывать (конструктивную) процедуру отыскания x по известным $y(\sigma) = H(\sigma) \Phi(\sigma, \tau)x$, $\sigma \leq \tau$, а достаточно охарактеризовать случай, в котором это невозможно. Позднее мы покажем, что событие, которое *не* является неидентифицируемым, действительно можно идентифицировать. Другими словами, мы дадим в явном виде рецепт вычисления x по $\{y(\sigma): s \leq \sigma \leq \tau\}$.

Доказательство. Необходимость. Формула

$$x'M(s, \tau)x = \int_s^{\tau} \|H(\sigma) \Phi(\sigma, \tau)x\|^2 d\sigma$$

показывает, что если (τ, x) неидентифицируемо, то $x'M(s, \tau)x = 0$ при всех s . А так как M симметрична и неотрицательно определена, имеем $M = N'N$. Но отсюда $x'Mx = \|Nx\|^2 = 0$, откуда следует, что $Nx = 0$ и, следовательно, $Mx = N'Nx = 0$.

Достаточность. Если $x \in \ker M$, то $x'Mx = 0$, и та же формула показывает, что $H(\sigma) \Phi(\sigma, \tau)x = 0$ при всех $\sigma \leq \tau$.

Роль «дуального» результата играет следующая теорема,

(6.7) **Теорема.** В конечномерной линейной гладкой динамической системе Σ событие (τ, x) ненаблюдаемо тогда и только тогда, когда $x \in \ker \hat{M}(\tau, t)$ при всех $t \geq \tau$, где

$$\hat{M}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \Phi'(\sigma, \tau) H'(\sigma) H(\sigma) \Phi(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Бросается в глаза аналогия между следующими определениями: W (теорема (2.16)) и M , с одной стороны, и \hat{W} (теорема (2.24)) и \hat{M} , с другой. Иначе говоря, в некотором смысле понятие идентифицируемости естественным образом дополняет понятие управляемости, а понятие наблюдаемости — понятие достижимости. Выявить это проще всего с помощью преобразования подинтегральной функции для W в подинтегральную функцию для M . При фиксированном τ и произвольном вещественном α таким преобразованием может быть

$$\begin{aligned} G(\tau + \alpha) &\rightarrow H'(\tau - \alpha), \\ (6.8) \quad \Phi(\tau, \tau + \alpha) &\rightarrow \Phi'(\tau - \alpha, \tau), \\ F(\tau + \alpha) &\rightarrow F'(\tau - \alpha). \end{aligned}$$

Другими словами, нам нужно воспользоваться зеркальным отображением графиков каждой функции $G(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ и $F(\cdot)$ относительно точки $t = \tau$, а затем перейти к транспонированным матрицам и заменить G на H . В случае если нас интересуют управляемость и идентифицируемость, параметр α должен быть неотрицательным. Если же речь идет о достижимости и наблюдаемости, то α должно быть неположительным.

Для стационарных систем эти преобразования упрощаются

$$\begin{aligned} G &\rightarrow H', \\ (6.9) \quad e^{-tF} &\rightarrow e^{-tF'}, \\ F &\rightarrow F'. \end{aligned}$$

Соотношения дуальности (6.8) и (6.9), очевидно, взаимно однозначны. Действительно, обратные преобразования задаются соотношениями

$$\begin{aligned} H(\tau - \alpha) &\rightarrow G'(\tau + \alpha), \\ (6.10) \quad F(\tau - \alpha) &\rightarrow F'(\tau + \alpha) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H &\rightarrow G', \\ (6.11) \quad F &\rightarrow F'. \end{aligned}$$

С помощью этих соотношений можно построить критерии наблюдаемости и идентифицируемости, основанные на критериях

достижимости и управляемости, а затем воспользоваться результатами § 2.2 и 2.3 для получения явных условий. С учетом теоремы (6.7) удобно воспользоваться следующими определениями.

Система Σ *полностью наблюдаема в момент τ* тогда и только тогда, когда ни одно событие (τ, x) системы Σ не является ненаблюдаемым, за исключением события $(\tau, 0)$.

Система Σ *полностью идентифицируема в момент τ* тогда и только тогда, когда ни одно событие (τ, x) системы Σ не является неидентифицируемым, за исключением $(\tau, 0)$.

Тогда, воспользовавшись преобразованием (6.10), мы сразу получим следующий результат.

(6.12) Предложение. *Пара матричных функций*

$$t \mapsto F(t), \quad t \mapsto H(t)$$

определяет систему Σ , которая в момент времени τ полностью наблюдаема, тогда и только тогда, когда пара матричных функций

$$t \mapsto F'(2\tau - t) = F^*(t), \quad t \mapsto H'(2\tau - t) = G^*(t)$$

определяет систему Σ^ , которая в момент времени τ полностью достижима.*

Предоставляем читателю самому сформулировать другие результаты того же типа.

В оставшейся части этой главы будем использовать термин «линейная система» как сокращенное обозначение для термина «конечномерная линейная гладкая и стационарная система».

С учетом преобразования (6.9) следствие (3.13) можно перефразировать следующим образом.

(6.13) Предложение. *Для n -мерной линейной системы Σ*

$$\begin{aligned} \dim \ker M(\tau, t) &= n - \dim \text{range } M(\tau, t) = \\ &= n - \text{rank}[H', F'H', \dots, (F')^{n-1}H'] \text{ при всех } t > \tau. \end{aligned}$$

На этом предложении или на предложении (6.12) основывается следующее предложение.

(6.14) Предложение. *Пара постоянных матриц $\{F, H\}$ соответствует полностью идентифицируемой системе тогда и только тогда, когда пара $\{F', H'\}$ соответствует полностью управляемой системе.*

Приведем для полноты еще и теорему, дуальную теореме (3.4).

(6.15) Теорема. *Линейная n -мерная система Σ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank } D = \text{rank}[H', F'H', \dots, (F')^{n-1}H'] = n.$$

Здесь D — матрица размера $n \times np$, составленная из столбцов матриц $H', F'H', \dots, (F')^{n-1}H'$.

Теперь приведем схему идентификации текущего состояния полностью идентифицируемой системы, основывающуюся на наблюдениях прошлых значений выходных величин. Если бы нам нужно было сделать это, сохраняя строгую дуальность с результатами из § 2.2, относящимися к управляемости, нам пришлось бы попытаться описать сначала схему идентификации $x(\tau)$, использующую данные о поведении в прошлом на конечном интервале $[s, \tau]$. Вместо этого мы предпочитаем прямо перейти к теореме, двойственной относительно теореме (5.10) и замечания (5.12), воспользовавшись одним понятием, введенным Бэссом (впервые сформулировано в 1963 г. в неопубликованном отчете).

(6.16) **Определение.** Линейная система $\hat{\Sigma}$ называется *системой асимптотической оценки* состояния линейной системы Σ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

При этом система $\hat{\Sigma}$ описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= F_{\Sigma}(t)\hat{x} + L(t)[y(t) - H_{\Sigma}(t)\hat{x}] + G_{\Sigma}(t)u(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t). \end{aligned}$$

Здесь нижние индексы Σ у матриц указывают на то, что эти матрицы определяют систему Σ .

Мы не станем развивать теорию систем асимптотической оценки саму по себе, а перейдем сразу же к наиболее важному частному случаю.

(6.17) **Теорема.** Для линейной системы Σ с одним ($p = 1$) выходом система асимптотической оценки существует тогда и только тогда, когда она полностью идентифицируема.

Доказательство. Мы добьемся даже большего: мы построим систему $\hat{\Sigma}$ в явном виде. Для этого обозначим через h' матрицу H размера $1 \times n$. Предполагая, что (F, h') полностью идентифицируема, и используя предложение (6.14), мы можем сделать вывод, что (F', h) полностью управляема. Воспользуемся специальным базисом X , относительно которого матрицы (F', h) принимают каноническую форму (4.9). Тогда имеем

$$(6.18) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad h' = [0 \dots 1].$$

Пусть $\theta(z) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n$ есть произвольный нормированный многочлен, все нули которого имеют отрицательные действительные части. Если теперь построить вектор-столбец l с компонентами

$$l_{n-i+1} = \beta_i - \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

то (согласно теореме (5.10) или непосредственно) находим

$$(6.19) \quad \chi_{F-lh'} = \theta.$$

Но тогда, если

$$\frac{dx}{dt} = Fx + Gu(t)$$

и

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + l[y(t) - h'\hat{x}] + Gu(t)$$

являются уравнениями систем Σ и $\hat{\Sigma}$, то легко видеть, что $\tilde{x} = x - \hat{x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(6.20) \quad \frac{d\tilde{x}}{dt} = (F - lh')\tilde{x}$$

при начальных условиях

$$(6.21) \quad \tilde{x}(s) = x(s),$$

где s — момент времени, с которого начинается наблюдение выходных величин системы Σ . Действительно, условие (6.21) предполагает, что $\hat{x}(s) = 0$, так как вначале мы ничего не знаем о состоянии системы Σ . Но, так как в соответствии с условием (6.19) и предположением, сделанным относительно θ , у собственных чисел матрицы $F - lh'$ из уравнения (6.20) могут быть лишь отрицательные действительные части, имеем $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ при любых значениях $x(s)$. А это доказывает достаточность условий теоремы.

Необходимость этих условий сразу следует из определения идентифицируемости.

Если же вспомнить, что многочлен θ выбирался совершенно произвольно при условии, что действительные части всех его нулей отрицательны, то получим важное следствие.

(6.22) **Следствие.** *Динамические свойства (6.20) ошибки асимптотической оценки состояния могут устанавливаться произвольным образом, за тем лишь исключением, что все ошибки этой оценки стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е.*

$$\operatorname{Re} \lambda_i [F - lh'] < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

Форму матриц из уравнений (6.18) мы станем называть *идентификационным каноническим представлением*,

В качестве иллюстрации полученных результатов решим теперь одну типичную задачу теории линейных систем.

(6.23) **Определение.** Пусть $\hat{\Omega}$ — пространство непрерывных функций $T \rightarrow \mathbf{R}$. Линейная система $\hat{\Sigma}$ с одним входом ($m = 1$) называется *асимптотическим дифференциатором* порядка $n-1$ тогда и только тогда, когда при всех $\hat{u}(\cdot) \in \hat{\Omega}$ имеем

$$\hat{x}_i(t) = \frac{d^i \hat{u}(t)}{dt^i} + \hat{e}_i(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

и каждое $\hat{e}_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

(6.24) **Теорема.** Если $\hat{\Omega}$ — пространство всевозможных многочленов t степени не выше $(n-1)$ с коэффициентами из \mathbf{R} , то асимптотический дифференциатор $\hat{\Sigma}$ порядка $(n-1)$ (являющийся n -мерной системой) существует.

Доказательство. Входные воздействия \hat{u} можно рассматривать как выходные величины $y(t) = \hat{u}(t)$ системы Σ , описываемой матрицами

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = h' = [0 \dots 1], \quad G = 0.$$

Действительно, несложный расчет показывает, что

$$e^{Ft} = \sum_0^{\infty} \frac{t^k F^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, функция

$$(6.25) \quad y(t) = h' e^{Ft} x = \sum_0^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_{n-k-1}$$

является многочленом. Другими словами, любой многочлен степени не выше n может быть получен в качестве выходной величины $y(\cdot)$ системы Σ за счет подходящего выбора начального состояния $x \in X_{\Sigma}$. Но, так как система Σ полностью измерима, можно построить, согласно теореме (6.17), систему оценки ее состояния. Соотношение (6.24) показывает, что оценка состояния системы $\hat{\Sigma}$ эквивалентна оценке производных $y(\cdot)$, или, что то же, производных \hat{u} .

(6.26) **Замечание.** Приведенный пример указывает на то, как важен характер $\hat{\Omega}$. Действительно, использованный прием успешно работает только потому, что многочлены степени не выше n образуют n -мерное векторное пространство.

(6.27) **Замечание.** Так же как и в теореме (5.10) и замечании (5.12), для рационального выбора коэффициентов β_1, \dots, β_n требуется задать некоторый критерий оптимальности. Если сигнал $y(t)$ искажается помехами, то «наилучший» выбор коэффициентов β_k определяется теорией фильтрации Колмогорова — Винера в формулировке Калмана — Бюси (Калман, Бюси [1961]). Результат этого выбора будет зависеть от спектральной плотности помех, а также от динамических свойств системы Σ (§ 3.6). В линейном случае эта теория в точности дуальна теории оптимального управления. В нелинейном же случае до сих пор не удалось найти эффективных методов решения.

(6.28) **Замечание.** Отметим, что в приведенном выше примере $\dim X_\Sigma = \dim X_{\hat{\Sigma}}$. Это — прямое следствие линейности. В нелинейном случае $\dim X_{\hat{\Sigma}} = \infty$, если даже $\dim X_\Sigma$ конечно.

Для условий теоремы (6.17) известен другой интересный результат. Предположим, что переменные состояния системы Σ выбраны таким образом, что

$$x_{n-p+1}(t) = y_1(t), \dots, x_n(t) = y_p(t).$$

Если выходные величины $y_1(t), \dots, y_p(t)$ совершенно не искажаются (т. е. известны в точности), то мы можем отождествить их с переменными состояниями $x_{n-p+1}(t), \dots, x_n(t)$, так что остается лишь оценить переменные $x_1(t), \dots, x_{n-p}(t)$. (Заметим, что этот подход не годится, если $y(t)$ смешивается даже со слабыми помехами. В этом случае нужно воспользоваться полной теорией Калмана — Бюси. Однако если $y(t)$ совсем не имеет помех, то мы приходим к вырожденному случаю этой теории, заслуживающему специального рассмотрения.)

Наивный, но содержательный подход к решению задачи синтеза системы оценки состояния Σ состоит в том, чтобы положить

$$\hat{\Sigma}: \begin{cases} \frac{d\hat{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-p} f_{ij}\hat{x}_j + \sum_{j=1}^p f_{i, n-p+j}y_j(t); & i = 1, \dots, n-p; \\ \hat{x}_{n-p+i}(t) = y_i(t), & i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Однако система оценки $\hat{\Sigma}$ может быть недопустимой, так как нет никакой гарантии в том, что подматрица размера $(n-p) \times (n-p)$

$$\hat{F} = [f_{ij}], \quad i = 1, \dots, n-p, \quad j = 1, \dots, n-p,$$

в левом верхнем углу матрицы F системы будет устойчивой (т. е. что действительные части ее собственных чисел будут только отрицательными). Люенбергер [1964] первым заметил, что *даже в этом случае существует система асимптотической оценки, собственные числа которой могут выбираться произвольным образом.*

Мы докажем этот важный результат совсем не так, как это сделано в оригинальном доказательстве Люенбергера. Наше доказательство будет опираться на следующие основные идеи:

1. Заметим, что хотя собственные числа матрицы F не зависят от выбора системы координат (т. е. собственные числа матриц F и BFB^{-1} одинаковы для любой невырожденной матрицы B), это *не обязательно справедливо относительно подматриц матрицы F .*

2. Воспользуемся условием полной идентифицируемости для выбора переменных состояния таким образом, чтобы подматрица \hat{F} , определяющая динамику системы $\hat{\Sigma}$, имела произвольный требуемый набор собственных чисел.

Для простоты мы рассмотрим лишь случай $p = 1$. В этом случае справедлива следующая лемма.

(6.29) **Лемма.** *Если пара $\{F, h'\}$ полностью измерима, то существует такое линейное преобразование B , задаваемое матрицей*

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{smallmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

которое преобразует идентификационное каноническое представление пары $\{F, h'\}$ в модифицированное каноническое представление

$$(6.30) \quad F = \left[\begin{array}{c|c} \bar{F} & ? \\ \hline ? & ? \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} & \\ 1 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\beta_1 & \\ \hline & & & ? & ? \end{array} \right],$$

$$h' = [0 \quad \dots \quad 01],$$

где символ ? показывает, что соответствующие элементы матрицы F не представляют интереса для последующего использования леммы.

Доказательство. Воспользуйтесь каноническим представлением (6.18) и проверьте справедливость утверждения (6.30).

Поскольку \bar{F} есть сопровождающая матрица, так же как и в § 2.4, имеем

$$\chi_{\bar{F}}(z) = z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1},$$

и, следовательно, справедлива теорема Люенбергера,

(6.31) **Теорема.** Собственные числа \bar{F} можно выбирать произвольно в соответствии с выбором преобразования B .

В следующем параграфе мы приведем пример системы оценки Льюенбергера.

(6.32) **Замечание.** Очевидно, что можно еще раз воспользоваться принципом дуальности и получить двойственный результат для задачи управления. Рекомендуем читателю тщательно проверить справедливость следующего утверждения. *Если (F, g) полностью управляема, то переменные состояния можно выбирать таким образом, чтобы подмножество переменных состояний $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ описывало подсистему с произвольной заданной динамикой.*

2.7 Конструкция регуляторов

Подведем прежде всего итог тому, чего нам удалось уже добиться.

Если объект полностью управляем, то можно привести такие законы управления, которые переводят систему из произвольного начального состояния в начало координат за некоторый конечный промежуток времени (теорема (5.4)), или, если нас устраивают лишь стационарные законы управления, мы можем произвольным образом выбирать динамику системы (теорема (5.10)).

Если объект полностью идентифицируем, то, по крайней мере в стационарном случае, можно привести такую схему идентификации (теорема (6.15)), которая оказывается дуальной схеме управления из теоремы (5.10).

Остается решить две задачи.

1. При каких условиях можно быть уверенным, что объект действительно обладает критическими свойствами полной управляемости и полной идентифицируемости?

2. Как совместить в решении первоначально поставленной задачи регулирования решения задачи управления (в которой переменные состояния считаются известными) и задачи идентификации состояния системы?

Исчерпывающее рассмотрение первого из этих вопросов слишком отвлекло бы нас в сторону. Отметим, однако, два важных результата, показывающих, что условия полной управляемости и полной идентифицируемости совершенно естественны для решаемой задачи.

(7.1) **Замечание.** В соответствии с «теоремой о канонической декомпозиции» для линейных динамических систем (см. Калман [1962а, 1963с], Вейсс, Калман [1965]) каждую такую систему можно рассматривать как прямую сумму (в определенном строгом

смысле этого выражения) четырех подсистем, из которых первая полностью достижима и наблюдаема, вторая полностью достижима, но не наблюдаема, и т. д. Более того, все причинные связи между входами и выходами проходят обязательно через первую подсистему и только через нее. Поэтому включить любую из остальных трех подсистем объекта в замкнутый контур невозможно. Это показывает, что с точки зрения возможностей управления нас интересует лишь первая подсистема. Такое положение вещей в очень сильной степени определяется линейностью объекта, как будет видно в дальнейшем из материала § 6.3.

(7.2) **Замечание.** В классической теории управления всегда (хотя и без достаточных логических оснований) предполагалось, что объект задан своими внешними характеристиками (см. определение (1.8) гл. 1). И хотя в классической теории результат, аналогичный теореме (5.10), никогда не был доказан, его справедливость обычно считалась само собой разумеющейся. Но почему?

Оказалось (и это один из фундаментальных новых результатов современной теории), что *на некотором промежутке времени любое гладкое линейное преобразование вход—выход с нулевым состоянием можно представить в виде гладкой линейной динамической системы Σ (см. теорему (2.8)), обладающей свойствами полной достижимости и полной наблюдаемости.* Это утверждение строго сформулировано в § 10.13.

Но если объект стационарен, то теорема (3.15) и ей дуальная показывают, что достижимость эквивалентна управляемости, а наблюдаемость эквивалентна идентифицируемости. Другими словами, если предположить, что *объект стационарен и рассматривается как минимальная реализация отображения вход—выход с нулевым состоянием, то он всегда полностью управляем и полностью идентифицируем.* Эта счастливая случайность объясняет успех классической теории, несмотря на всю наивность и шаткость ее логических оснований. Этим же самым объясняется и то, что классическая теория оказалась не в состоянии справиться с задачей управления для нестационарного линейного объекта, поскольку в нестационарном случае из достижимости еще не следует обязательно управляемость, а из наблюдаемости не следует идентифицируемость. За дальнейшими разъяснениями мы вновь отсылаем читателя к § 10.13.

Вернемся теперь ко второму вопросу. Нам нужно объединить результаты, полученные ранее, в явное определение регулятора для линейного стационарного объекта.

В каждый момент времени t задача регулятора состоит в том, чтобы формировать сигнал управления $u(t)$, основываясь на имеющейся информации, т. е. на предшествовавших значениях выходных величин $\{y(\sigma) : \sigma \leq t\}$. К тому же хотелось бы, чтобы выполня-

лось соотношение

$$(7.3) \quad u(\tau) = -Kx(\tau),$$

но, естественно, в общем случае оно не подходит, так как $x(\tau)$ не известно, и его точные значения нельзя получить из $\{y(\sigma): \sigma \leq \tau\}$. Поэтому кажется целесообразным заменить (7.3) на

$$(7.4) \quad u(\tau) = -K\hat{x}(\tau),$$

где $\hat{x}(\tau)$ — оценка состояния системы, построенная по $\{y(\sigma): \sigma \leq \tau\}$ согласно теории, развитой в § 2.6.

Переход от формулы (7.3) к формуле (7.4) можно строго оправдать лишь в рамках стохастической теории оптимального управления. (При этом потребуются доказать, что во время этого произвольного перехода не происходит «никакой потери информации».) Следующие элементарные соображения могут служить частичным оправданием использования формулы (7.4), а также дать некоторое интуитивное представление о смысле решения.

(7.5) Предложение. Рассмотрим уравнения объекта, уравнение системы оценки его состояния (6.16) и закон управления (7.4):

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Fx + Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= F\hat{x} + L[y(t) - H\hat{x}] + Gu(t), \\ u(t) &= -K\hat{x}(t). \end{aligned}$$

Тогда характеристический многочлен χ_{overall} системы (7.6) в целом удовлетворяет уравнению

$$\chi_{\text{overall}} = \chi_{\text{control}} \times \chi_{\text{state}} = \chi_{F-GK} \times \chi_{F-LH}.$$

Доказательство. Многочлен χ_{overall} есть характеристический многочлен матрицы

$$F_{\text{overall}} = \begin{bmatrix} F & -GK \\ LH & F-LH-GK \end{bmatrix}.$$

Требуемый вывод не получается сразу из рассмотрения этой матрицы, но достигается без труда после соответствующей замены переменных. Заменим пару (x, \hat{x}) на пару (x, \bar{x}) . Это преобразование линейно и взаимно однозначно и, следовательно, не влияет на многочлен χ_{overall} . Но в новых координатах уравнения (7.6) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (F - GK)x - GK\bar{x}, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= (F - LH)\bar{x}, \end{aligned}$$

а так как эта система треугольна (во второе уравнение не входят переменные, дифференцируемые в первом), то требуемое утверждение получается сразу.

Теперь мы можем подвести следующий итог всему нашему исследованию.

(7.7) Теорема. *Рассмотрим линейный объект Σ , обладающий свойствами полной управляемости и полной идентифицируемости. Выберем матрицу K , определяющую устойчивый закон управления, т. е. выберем K так, чтобы многочлен χ_{F-GK} был устойчивым многочленом. Точно так же выберем матрицу L , определяющую устойчивую систему оценки состояния; в этом случае многочлен χ_{F-LH} также устойчив. Определим регулятор как систему, состоящую из системы оценки состояния и закона управления (7.4). Тогда система в целом (объект плюс регулятор) описывается уравнением (7.6).*

Эта замкнутая система устойчива.

Более того, динамическое поведение этой системы есть прямая сумма динамического поведения контура регулирования (определяемого матрицей $F - GK$) и контура оценки состояния (определяемого матрицей $F - LH$).

Это показывает, что, пока «качество» системы оценивается исключительно в терминах теории устойчивости, возможность конструирования регулятора непосредственно получается из свойств управляемости и идентифицируемости системы. И если объект управления адекватно описывается конечномерной линейной стационарной динамической системой, то на возможность решения этой задачи не влияют никакие другие математические, теоретические или физические соображения. Напомним при этом, что теория управления имеет дело не с реальным миром, а всего лишь с его математическими моделями.

В точности такой же, как и в теореме (7.7), результат остается справедливым и при использовании системы оценки Люенбергера. Строгую формулировку соответствующей теоремы и ее доказательство оставляем читателю.

В заключение приведем пример подробного расчета одного регулятора.

(7.8) Пример. Рассмотрим простейший пример, представляющий определенный интерес для теории управления. Пусть передаточная функция объекта равна $1/s^2$ (этот объект представляет собой два последовательно соединенных интегратора). Из общей теории линейных систем (гл. 10) известно, что у такой передаточной функции есть минимальная «реализация» в виде стандартной линейной модели (3.2) из § 2.3 и что эта модель двумерна. Согласно замечанию (7.2), эта минимальная реализация полностью управляема и полностью идентифицируема.

Для объекта с передаточной функцией $1/s^2$ минимальную реализацию можно написать сразу же. Она задается матрицами

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если положить, что

$$\chi_{\text{control}}(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2,$$

то

$$k = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Определим систему оценки типа Люенбергера. Для этого прежде всего мы должны преобразовать систему координат так, чтобы перейти к каноническому представлению. В нашем очень простом случае такое преобразование состоит в простой перестановке индексов переменных состояния: $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$. В этом случае матрицы F , g , h и k принимают следующий вид:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Как и в доказательстве леммы (6.29), подвергнем эти матрицы линейному преобразованию с матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и получим

$$F_{\text{new}} = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta^2 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad g_{\text{new}} = g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h_{\text{new}} = h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1\beta + \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно сразу составить «монтажную схему» регулятора. Она показана на рис. 2.1. Заметим, что она довольно сложна.

Если бы эта задача решалась в рамках классической теории управления, то регулятор определялся бы через его передаточную функцию. Поэтому для сравнения этих двух подходов нам придется вычислить передаточную функцию системы, приведенной на рис. 2.1. В результате такого расчета получим, что

$$\frac{u_1(s)}{y_1(s)} = T(s) = \frac{(\alpha_1\beta + \alpha_2)(s + \alpha_1) + \alpha_2\beta}{s + \alpha_1 + \beta} =$$

$$= (\alpha_1\beta + \alpha_2) \frac{s + \alpha_1 + \alpha_2\beta/(\alpha_1\beta + \alpha_2)}{s + \alpha_1 + \beta}.$$

Известно, что искомым регулятором служит звено опережающего типа с передаточной функцией

$$T(s) = \gamma \frac{s + \delta}{s + \varepsilon}, \quad \gamma, \delta, \varepsilon > 0, \quad \delta < \varepsilon.$$

Но так как все α_1 , α_2 и β положительны, то выводы современной теории согласуются с заключением классической.

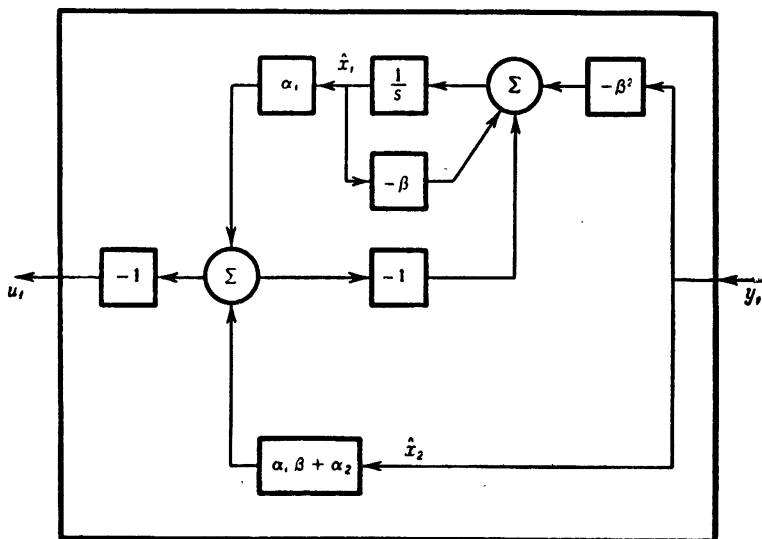


Рис. 2.1.

Связь между двумя этими подходами станет несколько яснее, если представить характеристический многочлен системы в виде

$$\chi_{\text{control}}(s) = s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2,$$

где $2\xi\omega = \alpha_1$, $\omega^2 = \alpha_2$. Полагая коэффициент затухания ξ равным $1/\sqrt{2}$, поскольку именно эта величина ξ считается оптимальной на практике, мы получим, что

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega (\sqrt{2}\beta + \omega), \\ (7.9) \quad \delta &= \sqrt{2}\omega + \frac{\omega\beta}{\sqrt{2}\beta + \omega} = \omega \left(\frac{3\beta + \sqrt{2}\omega}{\sqrt{2}\beta + \omega} \right), \\ \varepsilon &= \beta + \sqrt{2}\omega, \end{aligned}$$

Классическая процедура синтеза состоит в том, чтобы, учитывая наличие на выходе системы высокочастотных помех, попробовать довести отношение ε/δ до возможно большей величины. После этого γ выбирается так, чтобы обеспечить системе в целом требуемую устойчивость. В нашем случае

$$(7.10) \quad \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{(\beta/\omega)^2 + (3/\sqrt{2})(\beta/\omega) + 1}{(3/\sqrt{2})(\beta/\omega) + 1}.$$

Если β велико (т. е. на выходе нет помех), то отношение ε/δ может оказаться очень большим. Но, по мере того как требуемая ширина полосы пропускания ω приближается к ширине полосы частот помехи, определяющейся параметром β , отношение ε/δ стремится к значению 1,4. А это значение слишком мало для того, чтобы такой регулятор имел какой-либо практический смысл.

Примечательно, что в рамках классической теории управления так и не удалось получить явных формул типа (7.9) и (7.10) даже в этом простейшем случае. Приведенные выше выводы обычно получаются в результате длинных и нечетких рассуждений, якобы базирующихся на физической интуиции инженера. Причину трудностей классической теории нетрудно установить. Искомый регулятор сложным образом зависит от исходных параметров ξ , ω и β задачи синтеза. Но даже после исключения ξ приведенные выше формулы для γ , δ и ε слишком сложны для того, чтобы их можно было получить лишь благодаря физической «интуиции». Поэтому на данном этапе классическая теория управления прибегала к графическим расчетам и практическим рекомендациям, т. е. к прикладной математике наиболее примитивного типа.

(7.11) Замечание. Классическая теория управления была совершенно непригодна для изучения больших систем (большое n , более чем одно управляющее воздействие и т. д.), так как формулы, аналогичные формуле (7.10), оказываются весьма сложными. Даже в современной теории мы не стали бы пользоваться таким же методом, если бы передаточная функция объекта была намного сложнее, чем $1/s^2$. Но в этом и нет необходимости, так как единственная задача прикладной математики, оставшаяся у нас нерешенной, состоит в численном определении K и L . Такая задача легко решается с помощью мощных алгоритмов теории оптимальности. По этому поводу см. в первую очередь § 5.3—5.5.

(7.12) Замечание. Даже в рассмотренном простом случае «каноническая монтажная схема» регулятора, приведенная на рис. 2.1, слишком сложна для интуитивного понимания. Здесь преимущества современной теории управления проявляются особенно ярким образом. Мы получаем эту схему шаг за шагом без каких-либо навязанных заранее представлений о том, как она должна выглядеть в окончательном варианте.

Привлекательным кажется поразмышлять о том, какие выводы можно сделать на основании этих результатов, например, для биологических задач, и особенно для теории мыслительных процессов высших животных. Может оказаться, что попытки понять законы функционирования мозга, основываясь лишь на его анатомии (монтажной схеме), будут безнадежными. Возможно, что эта задача станет относительно прозрачной лишь после создания теории (в некотором смысле аналогичной представленной здесь), которая окажется достаточно сильной, чтобы из нее получались основные черты анатомии мозга.

П. Фалб

3 Основы теории оптимального управления

Основной предмет современной теории систем составляет проблема синтеза, представляющая собой по сути дела формулировку задачи, которую должно решать либо существующее физическое устройство, либо физическое устройство, которое нужно создать. Такая формулировка задачи предполагает указание различных конечных целей и требований, а получающаяся в результате синтеза система должна удовлетворять, естественно, и целому ряду ограничений по времени и стоимости создания системы, а также различным физическим ограничениям. Обычная процедура решения проблемы синтеза системы связана в первую очередь с созданием адекватной математической модели соответствующего физического явления, а это в общем случае чрезвычайно сложная задача. Если же такая математическая модель имеется, то конструктор в качестве следующего шага принимается за задачу синтеза модели системы в целом «на бумаге», а затем уже переводит полученную конструкцию на язык реального мира, строит систему из реальных устройств и начинает ее испытывать. Задачи управления образуют специальный подкласс задач синтеза систем.

В каждой задаче управления содержатся четыре основных элемента:

1. Система, которой нужно управлять.
2. Желаемый вид выходных величин или цель системы.
3. Множество допустимых управлений (или управляющих воздействий).
4. Мера стоимости или эффективности управляющих воздействий.

Перевод этих интуитивных понятий на язык некоторой жизне-способной и практически полезной математической теории приводит к созданию так называемой теории «оптимального управления» и формулировке задачи управления. Данная часть книги как раз

и посвящена проблемам оптимального управления. При этом мы часто будем опускать прилагательное «оптимальное», так как теория управления в устаревшем смысле этого слова нас вообще не интересует. Другими словами, нас будут интересовать собственно научные основы теории управления, а не инженерные методы автоматике. Тем не менее научные методы, которыми мы будем здесь заниматься, часто имеют и большое практическое значение.

В следующем параграфе мы начнем с формулировки абстрактной задачи управления. После этого мы определим понятие гладкой динамической системы, а затем укажем на особый класс задач управления, для которых будут получены определенные теоретические результаты. В § 3.4 мы займемся изучением теории Гамильтона — Якоби, что позволит в дальнейшем получить некоторые полезные достаточные условия оптимальности. После этого достаточные условия будут использованы в задаче управления линейным объектом с квадратичным критерием качества; здесь будут получены некоторые известные результаты, связанные с решениями уравнений Риккати. Затем мы используем эти результаты для решения задачи фильтрации и синтеза фильтров Калмана. Далее, в гл. 4 мы перейдем к изучению необходимых условий оптимальности. Для этого в § 4.1 используется вариационный подход, а в § 4.2 излагается принцип максимума Понтрягина и приводится его краткое эвристическое доказательство. А так как использование необходимых условий требует доказательства существования оптимальных управлений, этот вопрос вкратце рассматривается в § 4.3. Глава 5, посвященная процедурам синтеза систем управления, содержит несколько параграфов, описывающих различные вычислительные методы теории управления.

На самом деле в дальнейшем мы будем пользоваться довольно общими пространствами (например, банаховыми). Но, если это внушает читателю беспокойство, он может предположить, что рассматриваются только конечномерные пространства, и это не вызовет необходимости изменения каких-либо доказательств. Однако, поскольку некоторые бесконечномерные системы (например, с распределенными параметрами) представляют существенный интерес, нам показалось разумным расширить общность наших рассуждений.

3.1 Абстрактная задача управления

Начнем с того, что переведем на строгий математический язык основные понятия задачи управления. Предположим, что объект управления адекватно описывается динамической системой

$$\Sigma(T, U, \Omega, X, Y, \varphi, \eta)$$

с переходной функцией $\varphi(t; \tau, x, u(\cdot))$ и выходной функцией $\eta(t, x)$. Пусть S_0 есть некоторое заданное подмножество множества $T \times X \times Y$,

$$S_0 \subset T \times X \times Y,$$

а Γ — некоторое заданное подмножество множества Ω , $\Gamma \subset \Omega$. Назовем тогда S_0 *целевым множеством* (по выходу), а Γ — множеством *допустимых управлений*.

(1.1) **Определение.** Управляющее воздействие $u(\cdot)$ преобразует событие (t_0, x_0) в S_0 , если множество

$$\{(t, \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), \eta(t, \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)))) : t \geq t_0\}$$

пересекается с S_0 . Если $u(\cdot)$ преобразует событие (t_0, x_0) в S_0 и если t_1 есть время первого достижения, то t_1 называется *моментом достижения*, а разность $(t_1 - t_0)$ — *временем перехода*.

Пусть $M(t, x, y, \varphi, u, \eta)$ — некоторая заданная вещественная функция, определенная на множестве $T \times X \times Y \times (X^T) \times \Omega \times (Y^T)$. Если $u(\cdot)$ — некоторое управляющее воздействие, преобразующее (t_0, x_0) в S_0 с моментом достижения t_1 (или $t_1(u)$), то

$$M(t_1, x_1, y_1, \varphi_{(t_0, t_1)}(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot), \eta_{(t_0, t_1)}(\cdot, \varphi(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))))$$

есть вполне определенное вещественное число, которое мы будем обозначать через $J(t_0, x_0, u(\cdot), t_1, x_1)$; здесь $x_1 = \varphi(t_1; t_0, x_0, u(\cdot))$; $y_1 = \eta(t_1, x_1)$. Назовем $J(t_0, x_0, u(\cdot), t_1, x_1)$ *качеством управления $u(\cdot)$ относительно начального события (t_0, x_0)* .

(1.2) **Определение.** *Абстрактной задачей управления* называется сложное понятие, образованное динамической системой Σ , целевым множеством S_0 , множеством Γ допустимых управлений, подмножеством I множества $T \times X$ (множества начальных событий), функционалом качества управления J и требованием: «Для каждого начального события (t_0, x_0) определить некоторое допустимое управление $u(\cdot)$, которое преобразует (t_0, x_0) в S_0 и которое при этом минимизирует функционал $J(t_0, x_0, u(\cdot), t_1, x_1)$, где t_1 — момент первого достижения, а x_1 — точка первого достижения множества S_0 ».

Естественно, что из-за чрезвычайной общности этого определения для абстрактной задачи управления не удастся получить много содержательных результатов. В связи с этим мы введем некоторые дополнительные предположения, особенно относительно гладкости различных объектов, что позволит доказать некоторые полезные теоремы.

3.2 Гладкие динамические системы

В этой части книги мы рассматриваем лишь дифференциальные динамические системы с непрерывным временем. Другими словами, мы потребуем, чтобы множество моментов времени T нашей динамической системы было бы некоторым открытым промежутком (T_1, T_2) (возможно, вида $(-\infty, T_2)$ и т. п.) вещественной оси \mathbf{R} и чтобы переходная функция φ соответствовала (единственному) решению некоторого дифференциального уравнения. Будем также предполагать, что различные пространства X , Y , U и Ω наделены некоторой алгебраической и топологической структурой. Например, пространство X может быть банаховым. Более того, будем считать все функции, с которыми придется иметь дело, достаточно гладкими, т. е. удовлетворяющими подходящим условиям непрерывности и дифференцируемости. Динамические системы, удовлетворяющие этим различным условиям (которые мы вскоре уточним), называют *гладкими*.

(2.1) **Определение.** Динамическая система $\Sigma = \langle T, U, \Omega, X, Y, \varphi, \eta \rangle$ называется *гладкой*, если выполняются следующие условия:

- (а) $T = (T_1, T_2)$ есть некоторый открытый промежуток вещественной оси \mathbf{R} ;
- (б) U, X и Y есть подмножества банаховых пространств $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_X$ и \mathcal{B}_Y соответственно;
- (с) множество управляющих воздействий Ω ¹⁾ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) каждый элемент $u(\cdot) \in \Omega$ измерим и ограничен;
- 2) если $u(\cdot) \in \Omega$, то $u(t) \in U$ при всех $t \in T$;
- 3) если $u(\cdot) \in \Omega$, $\omega \in U$ и $[t, t'] \subset T$, то функция $\hat{u}(\cdot)$, определяемая соотношением

$$\hat{u}(s) = \begin{cases} \omega, & s \in [t, t'], \\ u(s), & s \notin [t, t'], \end{cases}$$

также принадлежит множеству Ω ;

- 4) если $[t_1, t_2] \subset T$, $t_1 \neq t_2$, а $v(\cdot)$ есть некоторая функция, отображающая $[t_1, t_2]$ в \mathcal{B}_U и удовлетворяющая условиям (1) и (2), то найдется такое $u(\cdot) \in \Omega$, что $u|_{[t_1, t_2]}(\cdot) = v(\cdot)$, или

$$u(t) = v(t) \text{ для } t \in [t_1, t_2];$$

¹⁾ Типичными примерами множества Ω могут служить функциональные пространства L^1 , L^2 или L^∞ . Однако функциональное пространство C^∞ бесконечно дифференцируемых функций не удовлетворяет условию (3), а следовательно, не может быть множеством Ω .

(d) переходная функция φ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) φ непрерывно по всем своим аргументам;
- 2) для любого заданного t_0 из T , любого x_0 из X и любого $u(\cdot)$ из Ω функция $\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ является единственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)^1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0$$

и определена для всех t из $[t_0, T_2]$; более того, $\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in X$ при всех t из $[t_0, T_3]$; функцию $f(x, u, t)$ называют *производящей* функцией динамической системы;

- (e) выходная функция η непрерывна по всем своим аргументам.

В дальнейшем в этой части книги мы будем под «динамической системой» понимать «гладкую динамическую систему».

3.3 Стандартная задача управления

Теперь мы приступим к обсуждению одного варианта задачи управления, для которого нам удастся получить некоторые теоретические результаты. Этот вариант задачи управления мы станем называть *стандартной задачей управления*.

Пусть Σ — наша (гладкая) динамическая система, а f — производящая функция системы Σ . Пусть S_0 — некоторое заданное подмножество множества $(T_1, T_2) \times X \times Y$ (целевое множество выходного пространства). Будем говорить, что система Σ *конструируема относительно* S_0 , если $\eta(t, x) \in \pi_Y(S_0)$ гарантирует, что $(t, x, \eta(t, x)) \in S_0$, где π_Y представляет собой оператор проектирования $(T_1, T_2) \times X \times Y$ на Y .

(3.1) **Замечание.** Пусть $S = \eta^{-1}(\pi_Y(S_0))$ и пусть система Σ конструируема относительно S_0 . Тогда управление $u(\cdot)$ преобразует событие (t_0, x_0) в S_0 тогда и только тогда, когда множество

$$(3.2) \quad \{(t, \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot))) : t \geq t_0\}$$

пересекается с S .

¹⁾ $dx(t)/dt$ является элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_X)$, которое мы отождествляем с \mathcal{B}_X . Таким образом, f есть отображение $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_U \times T$ в \mathcal{B}_X (Дье-донне [1960]).

В стандартной задаче управления мы будем предполагать, что целевое множество S является подмножеством пространства событий $(T_1, T_2) \times X$, и станем говорить, что управление $u(\cdot)$ преобразует событие (t_0, x_0) в S , если множество

$$(3.3) \quad \{(t, \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot))) : t \geq t_0\}$$

пересекается с S . Пусть $\Gamma \subset \Omega$ — заданное множество допустимых управлений, а $I \subset (T_1, T_2) \times X$ — заданное множество начальных событий. Теперь для формулировки стандартной задачи управления остается описать функционал качества J . С этой целью положим, что K есть некоторая вещественная функция, определенная на S , а L есть некоторая непрерывная вещественная функция, определенная на $X \times U \times (T_1, T_2)$ и обладающая тем свойством, что если $[t_1, t_2]$ есть некоторый замкнутый подинтервал промежутка (T_1, T_2) , а $x(\cdot)$ — непрерывная функция, отображающая $[t_1, t_2]$ в X , и, кроме того, $u(\cdot) \in \Omega$, то функция $L(x(\cdot), u(\cdot), \cdot)$ интегрируема на $[t_1, t_2]$. В этом случае, если $u(\cdot)$ есть некоторое управление, преобразующее событие (t_0, x_0) в S , а t_1 — первый момент достижения, то

$$K(t_1, \varphi(t_1; t_0, x_0, u(\cdot)))$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), u(t), t) dt$$

есть вполне определенные вещественные числа. Назовем сумму этих чисел *качеством управления* $u(\cdot)$ и обозначим ее через $J(t_0, x_0, u(\cdot))$. Другими словами, пусть

$$(3.4) \quad J(t_0, x_0, u(\cdot)) = K(t_1, x_1) + \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), u(t), t) dt,$$

где $x_1 = \varphi(t_1; t_0, x_0, u(\cdot))$ есть точка достижения. Член $K(t_1, x_1)$ называется *качеством конечного состояния*, а интегральный член в уравнении (3.4) называется *качеством траектории перехода*. Теперь мы готовы к тому, чтобы дать формальное определение.

(3.5) Определение. *Стандартная задача управления* — это сложное понятие, образованное некоторой гладкой динамической системой Σ , целевым множеством S , содержащимся в пространстве событий, множеством Γ допустимых управлений, множеством I начальных событий, функционалом качества управления $J(t_0, x_0, u(\cdot))$, определяющимся через функции K и L , согласно уравнению (3.4), и требованием: «Определить для каждого события $(t_0, x_0) \in I$ управление $u(\cdot) \in \Gamma$, преобразующее событие (t_0, x_0) в S и одновременно минимизирующее функционал $J(t_0, x_0, u(\cdot))$ ».

В дальнейшем в нашей части книги мы всюду вместо стандартной задачи управления будем говорить просто о задаче управления, а решения этой задачи будем называть *оптимальными управлениями*.

(3.6) **Пример.** Пусть $T = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ — ось вещественных чисел; $X = \mathbf{R}_n$ (евклидово n -мерное пространство); U — некоторое ограниченное подмножество пространства \mathbf{R}_m , например, $U = \{u: \|u\| \leq 1\}$, и пусть Ω — множество всевозможных измеримых функций $u(\cdot)$ из \mathbf{R} в \mathbf{R}_m , таких, что $u(t) \in U$ почти всюду. Обозначим через f такую функцию, отображающую $\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m \times \mathbf{R}$ в \mathbf{R}_n , что $f, \nabla_x f$ и $\nabla_t f \in C(\mathbf{R}_n \times \bar{U} \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbf{R}_n \times \bar{U} \times \mathbf{R})^1$, где \bar{U} есть замыкание U в \mathbf{R}_m , а через $\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — (единственное) решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$x(t_0) = x_0.$$

Пусть $Y = \mathbf{R}_n$ и $\eta(t, x) = x$. Тогда динамическая система $\Sigma = \langle \mathbf{R}, U, \mathbf{R}_n, \mathbf{R}_m, \varphi, \eta \rangle$ является гладкой и имеет производящую функцию f . Пусть S есть некоторое заданное подмножество пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_n$, например $S = \mathbf{R} \times \{0\}$, пусть Γ — подмножество множества Ω , например $\Gamma = \Omega$, а I — заданное подмножество пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_n$, скажем, $I = \{0\} \times \{x: \|x\| \geq 1\}$. Положим также, что $K(t, x) = 0$, а $L(x, u, t)$ — некоторая достаточно гладкая вещественная функция, например, $L(x, u, t) = \frac{1}{2} \langle x, Q(t)x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, R(t)u \rangle$, где $Q(\cdot)$ и $R(\cdot)$ — матричные функции. Тогда, если $u(\cdot) \in \Omega$ преобразует событие (t_0, x_0) в S с моментом первого достижения t_1 , то качество этого управления $u(\cdot)$ определяется по формуле

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), u(t), t) dt.$$

Например, если $(0, x) \in \{0\} \times \{x: \|x\| \geq 1\}$ и если $u(\cdot)$ преобразует $(0, x)$ в $\mathbf{R} \times \{0\}$ к моменту времени t_1 , то

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ \langle \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), Q(t) \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \rangle + \\ + \langle u(t), R(t) u(t) \rangle \} dt.$$

¹⁾ Если $f = f(x, u, t)$, то $\nabla_x f$ есть градиент f по x , а $\nabla_t f = \partial f / \partial t$. Через $\mathcal{B}(\mathbf{R}_n \times \bar{U} \times \mathbf{R})$ здесь обозначено множество всех ограниченных функций, отображающих $\mathbf{R}_n \times \bar{U} \times \mathbf{R}$ в \mathbf{R}_n .

Постановка такой задачи управления в точности удовлетворяет определению (3.5).

Заметим, что задачу управления можно считать эквивалентной задаче минимизации некоторого функционала, определенного на подмножестве нормированного линейного пространства. Отметим также, что для каждой данной задачи управления немедленно возникают два вопроса.

1. Существует ли решение этой задачи, т. е. существует ли оптимальное управление?

2. Если же оптимальное управление существует, то как его найти ¹⁾?

Получение ответов на эти вопросы и составляет самую суть теории управления. Для решения этих задач в теории управления используются различные подходы, которые можно грубо разбить на четыре направления.

1. Теория Гамильтона — Якоби, состоящая в получении и использовании основных достаточных условий, зависящих от решения определенного дифференциального уравнения (см. § 3.4).

2. Получение необходимых условий типа принципа максимума Понтрягина (см. § 4.1).

3. Методы функционального анализа (Фалб [1967], Кранц, Сарачик [1963], Куликовский [1959], Нейштадт [1965]).

4. Численные методы (Коллатц [1964], Тодд [1962], Витценхаузен [1965] и гл. 5 настоящей книги).

Вычислительный подход по своему характеру совершенно отличается от остальных трех подходов. Теорией Гамильтона — Якоби мы займемся в следующем параграфе, а необходимыми условиями — в гл. 4. Методы функционального анализа здесь не рассматриваются, так как это потребовало бы от читателя несколько более глубоких математических познаний ²⁾. Что же касается вычислительных методов, то в силу их специального характера мы сможем здесь лишь вкратце охарактеризовать их.

Различные подходы, используемые в теории управления, можно сравнивать между собой, основываясь на следующих критериях: 1) общность области применения; 2) четкий вид получаемых результатов; 3) простота применения этих результатов на практике; 4) физическая обоснованность принятых предположений. Все эти критерии мы будем иметь в виду в последующем изложении.

¹⁾ То, что это действительно совершенно разные вопросы, можно увидеть на примере непрерывной вещественной функции, определенной на компактном подмножестве пространства R_n . Такая функция всегда имеет минимум, но определить, в какой или каких точках она достигает этого минимума, далеко не просто.

²⁾ Тем не менее обратите внимание на последний параграф гл. 4.

3.4 Теория Гамильтона — Якоби

Нам предстоит решить стандартную задачу управления. Попытаемся вывести для этой задачи достаточные условия существования, опираясь на лемму Каратеодори в формулировке Калмана [1963а]. Прежде всего введем следующие обозначения.

(4.1) **Обозначение.** Если \mathcal{B} — некоторое банахово пространство, то через \mathcal{B}^* обозначим пространство, двойственное \mathcal{B} (т. е. \mathcal{B}^* есть множество непрерывных линейных функционалов, определенных на \mathcal{B}); далее, если $\lambda \in \mathcal{B}^*$, а $b \in \mathcal{B}$, то через $\langle \lambda, b \rangle$ обозначим действие λ на b ¹⁾.

(4.2) **Обозначение.** Если \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 есть банаховы пространства, а Λ — некоторое линейное преобразование \mathcal{B}_1 в \mathcal{B}_2 (т. е. $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$), то через Λ^* обозначим преобразование, сопряженное по отношению к Λ . Напомним, что Λ^* есть непрерывное линейное преобразование \mathcal{B}_2^* в \mathcal{B}_1^* (т. е. $\Lambda^* \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$), которое удовлетворяет условию $\Lambda^* \lambda_2 = \lambda_2 \Lambda$ для $\lambda_2 \in \mathcal{B}_2^*$, так что

$$(4.3) \quad \langle \Lambda^* \lambda_2, b_1 \rangle = \langle \lambda_2, \Lambda b_1 \rangle$$

для $\lambda_2 \in \mathcal{B}_2^*$ и $b_1 \in \mathcal{B}_1$. В конечномерном случае, когда Λ можно рассматривать как некоторую матрицу, Λ^* оказывается просто транспонированной матрицей матрицы Λ .

(4.4) **Определение.** Пусть $\mathcal{R} \subset (T_1, T_2) \times X$. Если $(t_0, x_0) \in \mathcal{R}$ и $\dot{u}(\cdot) \in \Omega$, то говорят, что $\dot{u}(\cdot)$ *\mathcal{R} -преобразует* (t_0, x_0) в S , если $\dot{u}(\cdot)$ преобразует (t_0, x_0) в S по траектории, целиком принадлежащей \mathcal{R} , т. е. если $(t, \varphi(t; t_0, x_0, \dot{u}(\cdot))) \in \mathcal{R}$ при $t \geq t_0$. Допустимое управление $u^0(\cdot)$ называется *оптимальным относительно \mathcal{R}* и некоторого заданного начального события (t_0, x_0) из \mathcal{R} , если

(а) $u^0(\cdot)$ \mathcal{R} -преобразует (t_0, x_0) в S и

(б) для любого элемента $u^1(\cdot) \in \Omega$, \mathcal{R} -преобразующего (t_0, x_0) в S , справедливо $J(t_0, x_0, u^0(\cdot)) \leq J(t_0, x_0, u^1(\cdot))$.

После завершения этих предварительных определений мы можем сформулировать и доказать основополагающую лемму Каратеодори.

(4.5) **Лемма.** *Предположим, что $K(t, x) = 0$ для $(t, x) \in S$ и что для каждого события (t, x) из области $\mathcal{R} \subset (T_1, T_2) \times X$ функция $L(x, u, t)$ как функция $u(\cdot)$ достигает своего единственного абсолют-*

¹⁾ Хотя такое обозначение и согласуется с употреблением символа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для обозначения скалярного произведения в R_n , читатель должен иметь в виду различные соответствующих понятий.

ного минимума по всевозможным $u \in U$ в точке $u^0(t, x)$, где она обращается в нуль, т. е.

$$(4.6) \quad 0 = L(x, u^0(t, x), t) < L(x, u, t)$$

для всех $u \in U$, $u \neq u^0(t, x)$. Пусть $\hat{u}(\cdot) \in \Omega$ таково, что

(а) $\hat{u}(\cdot)$ \mathcal{R} -преобразует (t_0, x_0) в S_1 с моментом первого достижения t_1 ,

(б) $\hat{u}(t) = u^0(t, \hat{x}(t))$ при (почти) всех t из $[t_0, t_1]$, где для удобства мы обозначили через $\hat{x}(t)$ функцию $\varphi(t; t_0, x_0; \hat{u}(\cdot))$.

Тогда управление $\hat{u}(\cdot)$ оптимально относительно \mathcal{R} и (t_0, x_0) .

Доказательство. Заметим, что поскольку $K(t, x) = 0$ на S , а подинтегральная функция в выражении для критерия качества обращается для оптимального управления в нуль согласно условиям леммы (4.6), имеем

$$J(t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)) = K(t_1, \hat{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(\hat{x}(t), u^0(t, \hat{x}(t)), t) dt = 0.$$

Но если $u'(\cdot)$ есть некоторый элемент множества Ω , \mathcal{R} -преобразующий событие (t_0, x_0) в S с моментом первого достижения t_2 , то

$$\begin{aligned} J(t_0, x_0, u^1(\cdot)) &= K(t_2, x^1(t_2)) + \int_{t_0}^{t_2} L(x^1(t), u^1(t), t) dt \geq \\ &\geq \int_{t_0}^{t_2} L(x^1(t), u^0(t, x^1(t)), t) dt = 0, \end{aligned}$$

согласно условию $K(t, x) = 0$ на S и согласно условию (4.6), что и доказывает лемму; заметьте, что мы положили здесь

$$x^1(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u^1(\cdot)).$$

Отметим, что управление $\hat{u}(\cdot)$ не должно быть оптимальным, поскольку могут существовать управления $\tilde{u}(\cdot)$ из Ω , преобразующие (t_0, x_0) в S по траекториям, не принадлежащим \mathcal{R} , но качество которых описывается числом, меньшим нуля, т. е.

$$J(t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot)) < J(t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)) = 0.$$

Для того чтобы иметь возможность пользоваться этой леммой, нам нужно ввести понятия гамильтониана и регулярности (или нормальности). Допуская большую общность, мы можем определить гамильтониан системы как некоторую меру сравнения качества различных управлений и, следовательно, как своего рода дифференциал (или градиент) функционала качества. Это замечание станет

яснее впоследствии. Сформулируем теперь понятие гамильтониана более строго.

(4.7) **Определение.** Вещественная функция H , определенная на $X \times \mathcal{R}_X^* \times U \times (T_1, T_2)$ согласно соотношению

$$(4.8) \quad H(x, \lambda, u, t) = L(x, u, t) + \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle,$$

где f — производящая функция динамической системы Σ — называется *гамильтонианом* (или функционалом Гамильтона) задачи управления.

(4.9) **Определение.** Пусть $\mathcal{R} \subset (T_1, T_2) \times X$. Если для каждого $(t, x) \in \mathcal{R}$ и $\lambda \in \mathcal{R}_X^*$ у функции $H(x, \lambda, u, t)$ как функции u имеется единственный абсолютный минимум по всем u из U в точке, обозначаемой через $u^0(t, x, \lambda)$, т. е. если

$$(4.10) \quad H(x, \lambda, u^0(t, x, \lambda), t) < H(x, \lambda, u, t)$$

при всех $u \in U$, $u \neq u^0(t, x, \lambda)$, то функция H называется *регулярной* (нормальной) относительно \mathcal{R} . В этом случае отображение $u^0(t, x, \lambda)$ пространства $\mathcal{R} \times \mathcal{R}_X^*$ в U называется *H -минимальным управлением* относительно \mathcal{R}^1 .

Напомним (см. Дьедонне [1960]), что если $V(t, x)$ есть некоторая вещественная функция, определенная на $(T_1, T_2) \times X$, то $\partial V / \partial t$ — непрерывное линейное преобразование \mathbb{R} в \mathbb{R} , а $\partial V / \partial x$ — непрерывное линейное преобразование \mathcal{R}_X в \mathbb{R} , т. е. принадлежит \mathcal{R}_X^* . Этот факт используется в следующем определении.

(4.11) **Определение.** Если функция H регулярна относительно \mathcal{R} , то уравнение в частных производных

$$(4.12) \quad \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, u^0\left(t, x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right), t\right) = 0$$

называется *уравнением Гамильтона — Якоби для соответствующей задачи управления* (относительно \mathcal{R}).

Отметим теперь, что если $V(t, x)$ и $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, то непрерывно дифференцируема и функция $V(t, x(t))$ и

$$(4.13) \quad \frac{dV(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}, \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle$$

(см. Дьедонне [1960]). Это замечание будет использовано при доказательстве следующей теоремы о достаточных условиях.

(4.14) **Теорема.** Пусть $\mathcal{R} \subset (T_1, T_2) \times X$. Предположим, что H регулярна относительно \mathcal{R} и что переходная функция φ непрерывно

¹) Отображение $u^0(t, x, \lambda)$ не является, конечно, настоящим допустимым управлением.

дифференцируема на \mathcal{R} (точнее говоря, на некотором открытом множестве, содержащем проекцию \mathcal{R} на (T_1, T_2)). Пусть управление $\hat{u}(\cdot) \in \Omega$ таково, что

(а) $\hat{u}(\cdot)$ \mathcal{R} -преобразует (t_0, x_0) в S с моментом первого достижения \hat{t} ;

(б) существует такое непрерывно дифференцируемое решение $V(t, x)$ управления Гамильтона—Якоби на \mathcal{R} , удовлетворяющее граничным условиям

$$(4.15) \quad V(t, x) = K(t, x)$$

при $(t, x) \in \mathcal{R} \cap S$, что

$$(4.16) \quad \hat{u}(t) = u^0\left(t, \hat{x}(t), \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial x}\right)$$

при (почти) всех t из $[t_0, t_1]$, где

$$\hat{x}(t) = \varphi(t; t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)).$$

Тогда $\hat{u}(\cdot)$ является оптимальным относительно \mathcal{R} и (t_0, x_0) .

Доказательство. Доказательство этой теоремы состоит в непосредственном применении леммы Каратеодори. Прежде всего введем функцию $\hat{L}(x, u, t)$, такую, что

$$\begin{aligned} \hat{L}(x, u, t) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, u, t\right) = \\ &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + L(x, u, t) + \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(x, u, t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Легко видеть, что \hat{L} удовлетворяет условиям этой леммы. Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что $\partial V(t, x)/\partial t$ не зависит от u . Поскольку функция H регулярна относительно \mathcal{R} , функция $H(x, \partial V(t, x)/\partial x, u, t)$ как функция u имеет единственный абсолютный минимум над U в точке $u^0(t, x, \partial V(t, x)/\partial x)$; отсюда следует, что $\hat{L}(x, u, t)$ как функция u имеет единственный абсолютный минимум в точке $\hat{u}^0(t, x) = u^0(t, x, \partial V(t, x)/\partial x)$ для $(t, x) \in \mathcal{R}$. Кроме того, функция V удовлетворяет на \mathcal{R} уравнению (4.12). Положим $\hat{K}(t, x) = 0$, и пусть функционал $\hat{J}(t_0, x_0, u(\cdot))$ равен стандартному критерию качества с \hat{K} и \hat{L} . Предположим, что $u^1(\cdot)$ \mathcal{R} -преобразует (t_0, x_0) в S с моментом первого достижения t^1 . Тогда, согласно лемме, имеем

$$\begin{aligned} (4.17) \quad 0 = \hat{J}(t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{\hat{t}} \hat{L}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) dt \leq \\ &\leq \hat{J}(t_0, x_0, u^1(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^1} \hat{L}(x^1(t), u^1(t), t) dt. \end{aligned}$$

Но с учетом уравнения (4.13) получаем

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} [V(t, \hat{x}(t))] + L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) &= \hat{L}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t), \\ \frac{d}{dt} [V(t, x^1(t))] + L(x^1(t), u^1(t), t) &= \hat{L}(x^1(t), u^1(t), t). \end{aligned}$$

Однако соотношения (4.17) и (4.18) вместе с граничными условиями (4.15) показывают, что

$$\begin{aligned} 0 = K(\bar{t}, \hat{x}(\bar{t})) &= \int_{t_0}^{\bar{t}} L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) dt - V(t_0, x_0) = \\ &= J(t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)) - V(t_0, x_0) \leqslant \\ &\leqslant K(t^1, x^1(t^1)) + \int_{t_0}^{t^1} L(x^1(t), u^1(t), t) dt - V(t_0, x_0) \leqslant \\ &\leqslant J(t_0, x_0, u^1(\cdot)) - V(t_0, x_0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

(4.19) **Следствие.** При выполнении условий теоремы решение $V(t, x)$ уравнения Гамильтона—Якоби описывает оптимальное качество управления относительно \mathcal{R} в том смысле, что

$$V(t_0, x_0) = J(t_0, x_0, \hat{u}(\cdot)).$$

Более того, если $t \in [t_0, \bar{t}]$, то $\hat{u}(\cdot)$ оптимально относительно \mathcal{R} и $(t, \hat{x}(t))$, т. е.

$$V(t, \hat{x}(t)) = J(t, \hat{x}(t), \hat{u}(\cdot)).$$

Сделаем теперь несколько замечаний относительно полученных достаточных условий. Обратим прежде всего внимание на существенно локальный характер этого результата, т. е. на то, что все утверждения делаются лишь относительно некоторой области \mathcal{R} пространства событий. Конечно, если $\mathcal{R} = (T_1, T_2) \times X$, то теорема дает достаточные условия глобальной оптимальности. Однако для этого потребовалась бы глобальная регулярность гамильтониана, а это зачастую не так. Более того, даже если глобальная регулярность гамильтониана имеет место, может оказаться, что получить глобальное решение Гамильтона—Якоби все равно не удастся. На практике эти трудности часто удается обойти, «расщепляя» пространство событий на подходящие области, в которых выполняются требуемые гипотезы (Атанс, Фалб [1966], Болтянский [1964]). Такой процесс разбиения используется часто и для проверки оптимальности управлений, построенных другими способами (например, с помощью необходимых условий).

По сути дела мы требуем здесь, чтобы уравнения системы оказались интегрируемыми после того, как в них будет подставлено H — минимальное управление, вычисленное относительно оптимального качества. Другими словами, требуется, чтобы уравнение

$$(4.20) \quad \frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u^0\left(t, x(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}, t\right)\right)$$

имело решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, которое лежало бы полностью в \mathcal{R} и пересекалось с целевым множеством S . Уравнение (4.20) часто кладут в основу того или иного вычислительного подхода к решению задачи управления. Из всего этого можно сформулировать еще одно следствие нашей основной теоремы.

(4.21) **Следствие.** Пусть $\mathcal{R} \subset (T_1, T_2) \times X$. Предположим, что H регулярна относительно \mathcal{R} и что существует непрерывно дифференцируемое решение $V(t, x)$ уравнения Гамильтона—Якоби на \mathcal{R} , удовлетворяющее граничным условиям $V(t, x) = K(t, x)$ при $(t, x) \in \mathcal{R} \cap S$. Если уравнение

$$(4.22) \quad \frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u^0\left(t, x(t), \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}, t\right)\right)$$

для каждого начального события (t_0, x_0) из \mathcal{R} имеет непрерывно дифференцируемое решение, лежащее целиком в \mathcal{R} и пересекающееся с S , то для каждого (t_0, x_0) из \mathcal{R} существует оптимальное относительно \mathcal{R} управление.

Этим следствием часто пользуются на практике.

Заметим теперь, что требование непрерывной дифференцируемости несколько сильнее, чем это нужно. На самом же деле достаточно, чтобы уравнение (4.13) выполнялось почти всюду вдоль траекторий системы, целиком лежащих внутри \mathcal{R} , а это условие будет выполняться, например, и в том случае, когда частные производные $V(t, x)$ просты¹⁾ (а не непрерывны) на \mathcal{R} и ϕ непрерывно дифференцируема на \mathcal{R} .

Теорема о достаточных условиях и уравнение Гамильтона—Якоби допускают интуитивно привлекательную геометрическую интерпретацию. Можно считать, что функция $V(t, x)$ определяет некоторую «поверхность» в пространстве $(T_1, T_2) \times X \times \mathbb{R}$ (рис. 3.1), которую можно назвать *поверхностью качества*. Тогда уравнение Гамильтона—Якоби является уравнением траектории наибо-

¹⁾ Функция называется *простой*, если у нее в каждой точке области определения есть односторонние пределы. Другими словами, у такой функции все разрывы первого рода (см. Дьедонне [1960]).

рейшего спуска, согласующегося с ограничениями на движение вдоль поверхности качества. Другими словами, уравнение Гамильтона — Якоби описывает эволюцию оптимального качества, а гамильтониан можно рассматривать как скорость изменения оптимального качества. Еще одна возможная интерпретация заключается в том, что в каждой точке P поверхности качества существует множество «направлений», «проекций» которых на пространство событий порождаются «конусом» направлений¹⁾ допустимых

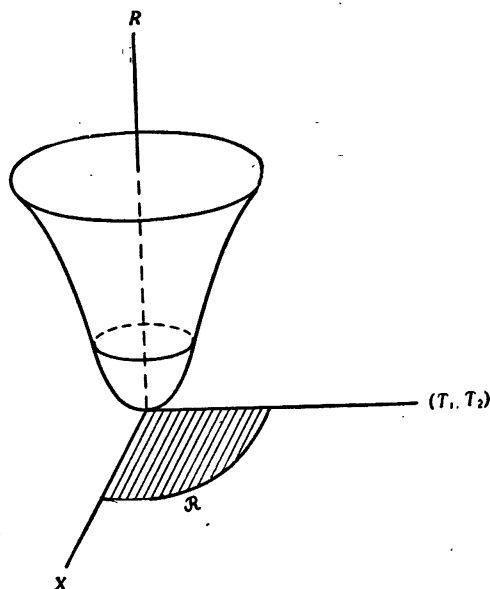


Рис. 3.1.

траекторий, выходящих из проекции точки P на пространство событий, а «направление», удовлетворяющее уравнению Гамильтона — Якоби, «проектируется» на направление оптимальной траектории. Кривая, касательное направление которой удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, проектируется, таким образом, на отрезок оптимальной траектории. Содержательный смысл этих представлений станет яснее, после того как в гл. 4 будут рассмотрены необходимые условия оптимальности.

Используем теперь полученные здесь результаты для решения задачи управления линейной системой с квадратичным критерием качества. Этим мы займемся в следующем параграфе.

¹⁾ То есть множество векторов вида $(1, f(x, u, t))$, $u \in U$, привязанное к точке (t, x) .

3.5 Линейные системы с квадратичным критерием качества

Весьма важным и полезным примером применения теории Гамильтона — Якоби может служить решение задачи, в которой динамическая система считается линейной, а критерий качества — квадратичным. Эта задача представляет особый интерес еще и потому, что ее решение тесно связано, с одной стороны, с традиционными методами управления (Калман [1963а, 1964], Уиллис, Брокетт [1965]), а с другой стороны, с задачей коррекции малых отклонений от заданной траектории. Как обычно, мы начнем с нескольких определений.

(5.1) **Определение.** Гладкая динамическая система

$$\Sigma = \langle (T_1, T_2), U, \Omega, X, Y, \varphi, \eta \rangle$$

называется *линейной*, если выполняются следующие условия:

(а) X , Y и \mathcal{H}_U есть гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ соответственно¹⁾;

(б) производящая функция $f(x, u, t)$ системы Σ имеет следующий вид:

$$f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u,$$

где $A(t) \in \mathcal{L}(X, X)$, $B(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_U, X)$, причем отображения $t \rightarrow A(t)$ и $t \rightarrow B(t)$ непрерывны (или просты) на промежутке (T_1, T_2) ;

(с) выходная функция $\eta(t, x)$ системы имеет вид

$$\eta(t, x) = C(t)x,$$

где $C(t) \in \mathcal{L}(X, Y)$, а отображение $t \rightarrow C(t)$ является простым на (T_1, T_2) .

Напомним, что если \mathcal{H} есть некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, то \mathcal{H}^* можно отождествить с \mathcal{H} ²⁾. В частности, это означает, что если $\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, то сопряженное преобразование ξ^* можно считать также принадлежащим пространству $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Назовем самосопряженный (или симметричный) элемент ξ пространства $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ *положительным*, если для любых $h \in \mathcal{H}$ справедливо, что $[h, \xi h] \geq 0$, и *положительно определенным*, если для любых $h \in \mathcal{H}$ и таких, что $h \neq 0$, справедливо, что $[h, \xi h] > 0$ (здесь преобразование ξ обратимо)³⁾. Наконец, если ξ положительно, то часто вместо $[\cdot, \xi \cdot]$ мы будем поль-

¹⁾ Мы будем обычно опускать эти нижние индексы, когда совершенно ясно, о каких скалярных произведениях идет речь.

²⁾ Мы будем пользоваться этим отождествлением для всех гильбертовых пространств, рассматриваемых в дальнейшем.

³⁾ Это второе условие на самом деле излишне.

зоваться обозначением $\| \cdot \|_{\xi}^2$. Другими словами, для любого h из \mathcal{H} имеем

$$\| h \|_{\xi}^2 = [h, \xi h].$$

В конечномерном случае ξ можно рассматривать как некоторую (симметрическую) матрицу, а свойства положительности и положительной определенности — как аналоги известных свойств неотрицательной и положительной определенности матриц.

(5.2) **Определение.** Пусть $z(t)$ есть некоторое простое отображение (T_1, T_2) в Y . Пусть ϕ — некоторый положительный элемент пространства $\mathcal{L}(Y, Y)$, пусть $\rho(t)$ — другой положительный элемент пространства $\mathcal{L}(Y, Y)$, такой, что отображение $t \rightarrow \rho(t)$ является простым на (T_1, T_2) , а $\sigma(t)$ — такой положительный элемент $\mathcal{L}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_U)$, что отображение $t \rightarrow \sigma(t)$ непрерывно на (T_1, T_2) . Если $K(t, x)$ задается уравнением

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \| z(t) - C(t)x \|_{\phi}^2$$

и если $L(x, u, t)$ таково, что

$$L(x, u, t) = \frac{1}{2} [\| z(t) - C(t)x \|_{\rho(t)}^2 + \| u \|_{\sigma(t)}^2],$$

то функционал качества $J(t_0, x_0, u(\cdot))$, выражающийся через эти K и L по формуле (3.4), называется *квадратичным функционалом качества* (для линейной системы из определения (5.1)).

Предположим теперь, что Σ — наша линейная система, K и L — показатели качества конечного состояния и переходной траектории соответственно; t_0 — некоторый заданный элемент из (T_1, T_2) ; x_0 — некоторый заданный элемент из X ; t_1 — заданный элемент из (t_0, T_2) (т. е. $t_1 > t_0$), а $S = \{t_1\} \times X$ — целевое множество.

Предположим еще, что

1. $U = \mathcal{B}_U$, так что в этой задаче допустимые управления не ограничены по величине;

2. Ω есть множество всех ограниченных простых функций¹⁾ из (T_1, T_2) в U .

Поскольку время t_1 фиксировано, а конечное состояние свободно, каждое $u(\cdot) \in \Omega$ преобразует (t_0, x_0) в S . Таким образом, если $u(\cdot) \in \Omega$, то

$$(5.3) \quad J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \| z(t_1) - C(t_1)x_u(t_1) \|_{\phi}^2 + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\| z(t) - C(t)x_u(t) \|_{\rho(t)}^2 + \| u(t) \|_{\sigma(t)}^2] dt,$$

¹⁾ См. примечание на стр. 95.

где $x_u(t)$ — решение уравнения системы при условии, что в начальный момент времени t_0 состояние системы есть $x_u(t_0) = x_0$ и что в уравнение подставлено выбранное управление $u(\cdot)$, т. е. $x_u(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$. Тогда наша задача управления состоит в нахождении такого $u(\cdot)$, которое минимизирует функционал $J(t_0, x_0, u(\cdot))$.

Мы вскоре решим эту задачу с помощью теории Гамильтона — Якоби (см. Калман [1963а]). Однако сначала рассмотрим физические основания этой конкретной задачи и наметим путь ее решения.

Если рассматривать $z(t)$ как желаемый выходной сигнал и положить $y_u(t) = C(t)x_u(t)$, то разность

$$e_u(t) = z(t) - y_u(t)$$

можно назвать ошибкой, соответствующей управлению $u(t)$. Требуется выбрать управление таким образом, чтобы по возможности уменьшить эту ошибку, одновременно не расходуя чрезмерно энергию управляющего воздействия. Отметим, что функционал качества J из уравнения (5.3), который можно переписать в виде

$$(5.4) \quad J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \|e_u(t_1)\|_{\phi}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|e_u(t)\|_{p(u)}^2 dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|_{\sigma(t)}^2 dt,$$

как раз и отражает эти требования. Значение J всегда неотрицательно, большим ошибкам приписываются большие веса, чем маленьким, и в J есть член, учитывающий расход «энергии» на управление (последний член в уравнении (5.4)). Более того, как мы увидим в дальнейшем, оптимальный закон управления для этой задачи реализуется линейным регулятором в контуре обратной связи, что также удобно с практической точки зрения.

Вывод решения этой задачи управления начнем с того, что рассмотрим один упрощенный вариант этой задачи, известный как *задача регулирования в пространстве состояний*. В этой последней задаче $C(t) = I$ (тождественное отображение), а $z(t) = 0$ при всех t . Ключевой момент решения состоит в получении уравнения Риккати с вытекающей отсюда необходимостью изучения свойств его решения. Затем мы рассмотрим *задачу регулирования в пространстве выходных величин*, в которой $z(t) = 0$ при всех t . А после этого перейдем к самой общей задаче, сформулированной выше, и получим ее решение. В завершение этого параграфа мы исследуем задачу регулирования для стационарных систем на бесконечном промежутке времени.

Итак, сосредоточим внимание на задаче регулирования в пространстве состояний. Другими словами, предположим, что $X = Y$ и что $C(t) = I$, а $z(t) = 0$ при всех возможных t . Тогда имеем

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \|x\|_{\phi}^2,$$

$$L(x, u, t) = \frac{1}{2} \|x\|_{p(t)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\sigma(t)}^2,$$

и, вспоминая, что X^* совпадает с X , мы видим, что гамильтониан H задачи определяется выражением

$$(5.5) \quad \begin{aligned} H(x, \lambda, u, t) &= L(x, u, t) + \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \|x\|_{p(t)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\sigma(t)}^2 + \langle \lambda, A(t)x + B(t)u \rangle. \end{aligned}$$

Теперь мы можем получить первый результат.

(5.6) **Предложение.** Пусть $\mathcal{R} = (T_1, T_2) \times X$ и пусть (\bar{t}, \hat{x}) — любой элемент из \mathcal{R} , а $\hat{\lambda}$ — любой элемент $X (= X^*)$. Тогда функция $H(\hat{x}, \hat{\lambda}, u, \bar{t})$ как функция u имеет единственный абсолютный минимум в точке $u^0(\bar{t}, \hat{x}, \hat{\lambda})$, где

$$(5.7) \quad u^0(\bar{t}, \hat{x}, \hat{\lambda}) = -\sigma^{-1}(\bar{t}) B^*(\bar{t}) \hat{\lambda}.$$

Другими словами, функция H регулярна относительно $(T_1, T_2) \times X$, и соответствующее этой функции H минимальное управление имеет следующий вид:

$$u^0(t, x, \lambda) = -\sigma^{-1}(t) B^*(t) \lambda.$$

Доказательство. Слагаемые функции $H(\hat{x}, \hat{\lambda}, u, \bar{t})$, зависящие от u , имеют следующий вид:

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} \langle u, \hat{\sigma} u \rangle + \langle \hat{B}^* \hat{\lambda}, u \rangle,$$

где $\hat{\sigma} = \sigma(\bar{t})$, а $\hat{B}^* = B^*(\bar{t})$. Но тогда у H имеется единственный абсолютный минимум в точке $u^0(\hat{x}, \bar{t}, \hat{\lambda})$ тогда и только тогда, когда в этой точке достигает своего единственного абсолютного минимума выражение (5.8). Но так как $\hat{\sigma}$ положительно определена, выражение (5.8) имеет единственный абсолютный минимум в точке $u^0(\bar{t}, \hat{x}, \lambda)$ тогда и только тогда, когда это справедливо для выражения

$$(5.9) \quad \langle u, \hat{\sigma} u \rangle + 2 \langle \hat{B}^* \hat{\lambda}, u \rangle + \langle \hat{B}^* \hat{\lambda}, \hat{\sigma}^{-1} \hat{B}^* \hat{\lambda} \rangle.$$

Но

$$\begin{aligned} \langle u, \hat{\sigma} u \rangle + 2 \langle \hat{B}^* \hat{\lambda}, u \rangle + \langle \hat{B}^* \hat{\lambda}, \hat{\sigma}^{-1} \hat{B}^* \hat{\lambda} \rangle &= \\ = \langle u + \hat{\sigma}^{-1} \hat{B}^* \hat{\lambda}, \hat{\sigma} (u + \hat{\sigma}^{-1} \hat{B}^* \hat{\lambda}) \rangle &= \|u + \hat{\sigma}^{-1} \hat{B}^* \hat{\lambda}\|_{\hat{\sigma}}^2. \end{aligned}$$

и, таким образом, из факта положительной определенности δ следует, что выражение (5.9) достигает своего единственного абсолютного минимума в некоторой точке $u = u^0(\bar{t}, \hat{x}, \hat{\lambda})$.

Заметим теперь, что если отображение $\pi(\cdot)$ пространства (T_1, T_2) в $\mathcal{L}(X, X)$ непрерывно дифференцируемо, то функция $W(t, x)$, где

$$(5.10) \quad W(t, x) = \frac{1}{2} \langle x, \pi(t) x \rangle,$$

также непрерывно дифференцируема на $(T_1, T_2) \times X$. Отсюда следует, что если $u(\cdot)$ есть произвольный элемент из Ω , а $x_u(\cdot)$ — некоторая траектория нашей системы, то

$$\frac{dW(t, x_u(t))}{dt} = \frac{\partial W(t, x_u(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial W(t, x_u(t))}{\partial x}, \frac{dx_u(t)}{dt} \right\rangle$$

почти всюду на (T_1, T_2) . Учитывая замечания, сделанные непосредственно за следствием (4.21), мы сразу видим, что если нам удастся найти решение уравнения Гамильтона — Якоби (5.10), то с помощью теоремы (4.14) мы сразу найдем оптимальное управление для поставленной задачи. Начнем со следующей леммы.

(5.11) **Лемма.** Если $\pi(t)$ есть некоторое решение дифференциального уравнения Риккати¹⁾

$$(5.12) \quad \dot{\pi}(t) = -\pi^*(t) A(t) - A^*(t) \pi(t) + \pi^*(t) S(t) \pi(t) - \rho(t),$$

где

$$(5.13) \quad S(t) = B(t) \sigma^{-1}(t) B^*(t),$$

то функция $W(t, x)$, построенная по формуле (5.10), удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби.

Доказательство. Согласно формуле (5.10), имеем

$$(5.14) \quad \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \langle x, \dot{\pi}(t) x \rangle, \quad \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} = \pi(t) x,$$

а, следовательно, в соответствии с уравнениями (5.14) и (5.5) левая часть уравнения (4.12) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle x, \dot{\pi}(t) x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, \rho(t) x \rangle + \frac{1}{2} \langle B^*(t) \pi(t) x, \sigma^{-1}(t) B^*(t) \pi(t) x \rangle + \\ & + \langle \pi(t) x, A(t) x - S(t) \pi(t) x \rangle = \frac{1}{2} \langle x, \dot{\pi}(t) x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, \rho(t) x \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle x, \pi^*(t) S(t) \pi(t) x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, \pi^*(t) A(t) x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, A^*(t) \pi(t) x \rangle, \end{aligned}$$

отсюда сразу получается утверждение леммы.

¹⁾ Здесь через $\dot{\pi}(t)$ обозначается $d\pi(t)/dt$.

Теперь понятно, что изучение дифференциального уравнения (5.12) может оказаться бесполезным. Если положить, что

$$(5.15) \quad g(t, \pi) = -\pi^* A(t) - A^*(t) \pi + \pi^* S(t) \pi - \rho(t),$$

то $g(t, \pi)$ оказывается локально липшицевым отображением $(T_1, T_2) \times \mathcal{L}(X, X)$ в $\mathcal{L}(X, X)$, простым по t и непрерывным по π . Это значит, что если t_1 есть некоторый заданный элемент из (T_1, T_2) , то существует некоторый открытый промежуток, содержащий t_1 , скажем (r_1, s_1) , в котором уравнение (5.12) имеет *единственное* решение $\pi_1(t)$, удовлетворяющее условию

$$(5.16) \quad \pi_1(t_1) = \phi$$

(см. Дьедонне [1960]). Заметим, что, так как $\phi = \phi^*$ и

$$g(t, \pi^*) = -\pi A(t) - A^*(t) \pi^* + \pi S(t) \pi^* - \rho(t),$$

функция $\pi_1^*(t)$ также является решением уравнения (5.12), удовлетворяющим условию (5.16). Отсюда следует, что $\pi_1(t)$ самосопряжено. Мы приходим к лемме.

(5.17) **Лемма.** Пусть t — некоторый элемент из (r_1, t_1) и пусть x — произвольный элемент из X . Тогда оптимальное относительно (t, x) управление $u^0(\cdot)$ существует, и ему соответствует значение функционала качества

$$(5.18) \quad J(t, x, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \langle x, \pi_1(t) x \rangle.$$

Доказательство. Эта лемма является прямым следствием предложения (5.6), леммы (5.11) и теоремы (4.14).

(5.19) **Следствие.** Если $t \in (r_1, t_1)$, то $\pi_1(t)$ положительно.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из X . Тогда, согласно нашим предположениям относительно Φ , $\rho(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$, имеем $\langle x, \pi_1(t) x \rangle = 2J(t, x, u^0(\cdot)) =$

$$= \|x^0(t_1)\|_{\Phi}^2 + \int_t^{t_1} [\|x^0(s)\|_{\rho(s)}^2 + \|u^0(s)\|_{\sigma(s)}^2] ds \geq 0,$$

где $x^0(\cdot)$ — траектория системы, соответствующая управлению $u^0(\cdot)$.

(5.20) **Следствие.** Отображение $t \rightarrow g(t, \pi_1(t))$ ограничено на $(r_1, t_1]$ (если $r_1 > T_1$).

Доказательство. Принимая во внимание сделанные допущения об отображениях $t \rightarrow A(t)$, $t \rightarrow B(t)$ и $t \rightarrow \rho(t)$, нам будет достаточно показать, что отображение t в $\pi_1(t)$ ограничено. Предположим вре-

менно, что найдется такое положительное π , что $\pi - \pi_1(t)$ положительно при всех t из $(r_1, t_1]$. Тогда можно утверждать, что $\|\pi\| \geq \|\pi_1(t)\|$ при любых t из $(r_1, t_1]$. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что для $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \langle x, \{\pi - \pi_1(t)\} x \rangle &= \langle x, \pi x \rangle - \langle x, \pi_1(t) x \rangle = \\ &= \langle \sqrt{\pi} x, \sqrt{\pi} x \rangle - \langle \sqrt{\pi_1(t)} x, \sqrt{\pi_1(t)} x \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

где $\sqrt{\pi}$ и $\sqrt{\pi_1(t)}$ — положительные квадратные корни¹⁾ из π и $\pi_1(t)$ соответственно. Отсюда следует, что $\|\sqrt{\pi}\| \geq \|\sqrt{\pi_1(t)}\|$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\pi\| &= \|\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}\| = \|\sqrt{\pi}\|^2 \geq \|\sqrt{\pi_1(t)}\|^2 = \\ &= \|\sqrt{\pi_1(t)} \cdot \sqrt{\pi_1(t)}\| = \|\pi_1(t)\|, \end{aligned}$$

поскольку $\|\xi\xi^*\| = \|\xi\|^2$ при всех ξ из $\mathcal{L}(X, X)$. Таким образом, остается только найти подходящее π .

Обозначим через $\Phi(r, s)$ переходное отображение (или резольвенту, или фундаментальное линейное отображение) нашей системы (§ 2.2 и Дьедонне [1960]). Тогда существует такое $c > 0$, что

$$\|\Phi(r, s)\|^2 \|\rho(r)\| \leq c \quad \text{для всех } (r, s) \text{ из } [r_1, t_1] \times [r_1, t_1]$$

и

$$\|\Phi(t_1, s)\|^2 \cdot \|\phi\| \leq c \quad \text{для всех } s \text{ из } [r_1, t_1].$$

Положим теперь $\pi = (c/2)(1 + t_1 - r_1)I$. Тогда π есть некоторый положительно определенный элемент из $\mathcal{L}(X, X)$, и можно утверждать, что при всех $x \in X$ и $t \in (r_1, t_1]$ справедливо

$$\langle x, \pi x \rangle \geq \langle x, \pi_1(t) x \rangle.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что если $x \in X$ и $t \in (r_1, t_1]$, то траектория нашей системы, начинающаяся из состояния x в момент времени t и соответствующая управлению $0(\cdot) = 0$, задается как $\Phi(r, t)x$. Но отсюда находим

$$\begin{aligned} 2J(t, x, 0(\cdot)) &= \|\Phi(t_1, t)x\|_{\phi}^2 + \int_t^{t_1} \|\Phi(r, t)x\|_{\rho(r)}^2 dr \leq \\ &\leq \left[\|\Phi(t_1, t)\|^2 \cdot \|\phi\| + \int_t^{t_1} \|\Phi(r, t)\|^2 \cdot \|\rho(r)\| dr \right] \cdot \|x\|^2 \leq \\ &\leq c(1 + t_1 - r_1) \cdot \|x\|^2, \end{aligned}$$

и, следовательно, имеем

$$J(t, x, 0(\cdot)) \leq \left\langle x, \frac{c}{2}(1 + t_1 - r_1)Ix \right\rangle = \langle x, \pi x \rangle.$$

¹⁾ Существование этих корней является известным следствием спектральной теоремы (Данфорд, Шварц [1958]).

Но для t из (r_1, t_1) по лемме (5.17) получаем

$$\langle x, \pi_1(t)x \rangle = J(t, x, u^0(\cdot)) \leq J(t, x, 0(\cdot)) \leq \langle x, \pi x \rangle,$$

что и доказывает следствие (5.20).

Объединяя следствие (5.20) с предложением 10.5.5 книги Дьедонне [1960], мы заключаем, что уравнение (5.12) имеет решение $\pi(t)$, удовлетворяющее условию (5.16) и определенное и единственное на $(T_1, t_1]$. Этот вывод базируется на следующих соображениях. Пусть $\hat{s} = \inf \{s: s \in (T_1, t_1] \text{ и такие, что существует положительное решение } \pi_s(\cdot) \text{ уравнения (5.12), удовлетворяющее условию (5.16) и определенное на } [s, t_1]\}$. Если оказалось бы, что \hat{s} больше T_1 , то существовало бы положительное решение $\pi_1(\cdot)$ уравнения (5.12), определенное на $(\hat{s}, t_1]$, удовлетворяющее условию (5.16) и в соответствии с утверждением следствия (5.20) ограниченное на $(\hat{s}, t_1]$. Но тогда существовало бы и решение уравнения (5.12), удовлетворяющее условию (5.16), которое было бы определено на $[\hat{s} - \varepsilon, t_1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Выбирая ε достаточно малым, чтобы было $\hat{s} - \varepsilon > T_1$, мы получаем противоречие, и, следовательно, $\hat{s} = T_1$ (или если $T_1 = -\infty$, то множество чисел s не ограничено снизу). Это позволяет нам установить следующий результат.

(5.21) Теорема. *Для любых t_0 из $(T_1, t_1]$ и x_0 из X задача регулирования в пространстве состояний имеет решения. Оптимальное управление для этой задачи задается в виде некоторой функции состояния*

$$(5.22) \quad u^0(t, x) = -\sigma^{-1}(t) B^*(t) \pi(t)x,$$

где $\pi(\cdot)$ — единственное решение уравнения Риккати, удовлетворяющее условию $\pi(t_1) = \Phi$. Оптимальная траектория системы определяется решением дифференциального уравнения

$$(5.23) \quad \frac{dx(t)}{dt} = [A(t) - S(t)\pi(t)]x(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Наконец, оптимальное качество системы вычисляется по формуле

$$(5.24) \quad J(t_0, x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \langle x_0, \pi(t_0)x_0 \rangle.$$

Отметим, что предлагаемый оптимальный закон управления приводит к построению нестационарной системы с обратной связью, в которой решение уравнения Риккати играет роль коэффициента усиления (см. схему на рис. 3.2).

Рассмотрим теперь задачу регулирования в пространстве выходных величин. Другими словами, еще раз предположим, что

$z(t) = 0$ при всех t . Тогда имеем

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \|C(t)x\|_{\phi}^2,$$

$$L(x, u, t) = \frac{1}{2} \|C(t)x\|_{\rho(t)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\sigma(t)}^2.$$

Зафиксируем t_1 и положим

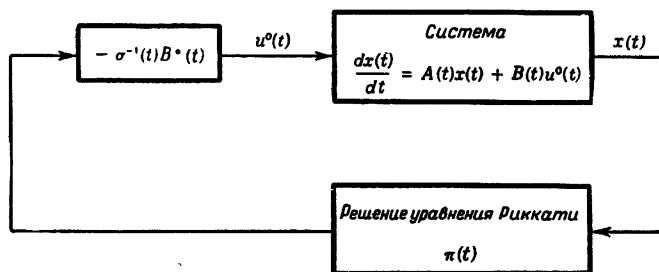
$$\hat{\phi} = C^*(t_1)\phi C(t_1),$$

$$\hat{\rho}(t) = C^*(t)\rho(t)C(t),$$

$$\hat{K}(t, x) = \frac{1}{2} \|x\|_{\hat{\phi}}^2,$$

$$\hat{L}(x, u, t) = \frac{1}{2} \|x\|_{\hat{\rho}(t)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\sigma(t)}^2.$$

Теперь мы можем воспользоваться уже полученным результатом, теоремой (5.21), для решения задачи регулирования в пространстве состояний для \hat{K} и \hat{L} ; тем самым мы решим исходную задачу



Р и с. 3.2.

регулирования в пространстве выходных величин, если только нам удастся показать, что $\hat{\phi}$ и $\hat{\rho}(t)$ положительны. Но так и получается в самом деле, как видно из следующей леммы.

(5.25) **Лемма.** Пусть α — некоторый положительный элемент из $\mathcal{L}(X, X)$, а β — произвольный элемент из $\mathcal{L}(X, X)$. Тогда $\beta^*\alpha\beta$ положительно.

Доказательство. Заметим, что $\langle x, \beta^*\alpha\beta x \rangle = \langle \beta x, \alpha \beta x \rangle$; это и доказывает лемму.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

(5.26) **Теорема.** Для любого t_0 из $(T_1, t_1]$ и любого x_0 из X задача регулирования в пространстве выходных величин всегда имеет

решение. Соответствующее оптимальное управление имеет следующий вид:

$$(5.27) \quad u^0(t, x) = -\sigma^1(t) B^*(t) \hat{\pi}(t) x,$$

где $\hat{\pi}(t)$ представляет собой единственное решение уравнения Риккати

$$(5.28) \quad \frac{d\hat{\pi}(t)}{dt} = -\hat{\pi}^*(t) A(t) - A^*(t) \hat{\pi}(t) + \hat{\pi}^*(t) S(t) \hat{\pi}(t) - \hat{\rho}(t),$$

удовлетворяющее условию

$$(5.29) \quad \hat{\pi}(t_1) = \hat{\phi}.$$

Оптимальная траектория системы описывается решением уравнения

$$(5.30) \quad \frac{dx(t)}{dt} = [A(t) - S(t) \hat{\pi}(t)] x(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Наконец, оптимальное качество такой системы вычисляется по формуле

$$(5.31) \quad J(t_0, x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \langle x_0, \hat{\pi}(t_0) x_0 \rangle.$$

Заметим, что единственное различие между теоремами (5.21) и (5.26) состоит в том, что во второй из них $\pi(t)$, ϕ , $\rho(t)$ заменены соответственно на $\hat{\pi}(t)$, $\hat{\phi}$, $\hat{\rho}(t)$. Отметим также, что оптимальное управление по-прежнему является функцией *состояния*, а не выходной величины. Это объясняется тем, что (грубо говоря) в состоянии системы содержится вся информация, необходимая для того, чтобы предсказывать будущие значения выходных величин на основании информации об управлении.

Перейдем, наконец, к исследованию функционалов качества общего вида, задающихся функциями K и L из определения (5.2). Заметим прежде всего, что

$$(5.32) \quad H(x, \lambda, u, t) = \frac{1}{2} \|z(t) - C(t)x\|_{p(t)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + \langle \lambda, A(t)x + B(t)u \rangle.$$

Но, так как выражение (5.32) зависит от u точно таким же образом, как и выражение (5.5), можно заключить, что гамильтониан (5.32) регулярен относительно $(T_1, T_2) \times X$ и что H -минимальное управление задается формулой

$$(5.33) \quad u^0(t, x, \lambda) = -\sigma^{-1}(t) B^*(t) \lambda.$$

Однако в силу зависимости этого гамильтониана от $z(t)$ ясно, что формула (5.10) уже не определяет решения уравнения Гамильто-

на — Якоби. Поэтому рассмотрим функцию $Z(t, x)$, определенную согласно следующему уравнению:

$$(5.34) \quad Z(t, x) = \frac{1}{2} \langle x, \pi(t) x \rangle - \langle x, \xi(t) \rangle + \varphi(t),$$

где через $\pi(\cdot)$ обозначено некоторое непрерывно дифференцируемое отображение в $\mathcal{L}(X, X)$, через $\xi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемое отображение в X , а через $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемое отображение в множество вещественных чисел \mathbb{R} .

(5.35) **Лемма.** Пусть $\pi(t)$ — решение уравнения Риккати

$$(5.36) \quad \dot{\pi}(t) = -\pi^*(t) A(t) - A^*(t) \pi(t) + \pi^*(t) S(t) \pi(t) - C^*(t) \rho(t) C(t),$$

пусть $\xi(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$(5.37) \quad \dot{\xi}(t) = -[A(t) - S(t) \pi(t)]^* \xi(t) - C^*(t) \rho(t) z(t),$$

а $\varphi(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$(5.38) \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2} [\|z(t)\|_{\rho(t)}^2 - \langle \xi(t), S(t) \xi(t) \rangle],$$

где $S(t) = B(t) \sigma^{-1}(t) B^*(t)$. Тогда $Z(t, x)$ является решением уравнения Гамильтона — Якоби.

Эта теорема доказывается непосредственными выкладками, которые мы оставляем читателю.

С учетом полученных выше результатов заметим, что уравнение (5.36) имеет единственное решение $\pi(t)$, определенное на $(T_1, t_1]$ и удовлетворяющее условию

$$(5.39) \quad \pi(t_1) = C^*(t_1) \phi C(t_1).$$

Что же касается уравнения (5.37), то оно линейно и, следовательно, имеет единственное решение $\xi(t)$, определенное на $(T_1, t_1]$ и удовлетворяющее условию

$$(5.40) \quad \xi(t_1) = C^*(t_1) \phi z(t_1)$$

(см. Дьедонне [1960]). Аналогично уравнение (5.38) имеет единственное решение $\varphi(t)$, определенное на $(T_1, t_1]$ и удовлетворяющее условию

$$(5.41) \quad \varphi(t_1) = \langle z(t_1), \pi(t_1) z(t_1) \rangle.$$

Таким образом, согласно замечаниям, сделанным непосредственно после следствия (5.21), мы можем воспользоваться теоремой (5.14) для получения следующего результата, служащего решением поставленной задачи.

(5.42) **Теорема.** Для любых t_0 из $(T_1, t_1]$ и x_0 из X задача управления линейной системой с квадратичным критерием качества всегда

имеет решение. Соответствующее оптимальное управление определяется по формуле

$$(5.43) \quad u^0(t, x) = -\sigma^{-1}(t) B^*(t) [\tilde{\pi}(t) x - \tilde{\xi}(t)].$$

Оптимальная траектория определяется решением следующего уравнения:

$$(5.44) \quad \frac{dx(t)}{dt} = [A(t) - S(t) \tilde{\pi}(t)] x(t) + S(t) \tilde{\xi}(t),$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Наконец, оптимальное качество системы вычисляется по формуле

$$(5.45) \quad J(t_0, x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \langle x_0, \tilde{\pi}(t_0) x_0 \rangle - \langle x_0, \tilde{\xi}(t_0) \rangle + \tilde{\varphi}(t_0).$$

Заметим, что уравнение Риккати относительно $\tilde{\pi}(\cdot)$ не зависит от $z(\cdot)$, так что структура оптимальной системы с обратной связью совпадает со структурой оптимальной системы регулирования в пространстве выходных величин. Основное отличие этих двух оптимальных систем состоит в появлении в более общей из них «вынуждающего» воздействия $\tilde{\xi}(t)$, осуществляющего «коррекцию» регулирующего характера более общей системы. Отметим еще, что для определения $\tilde{\xi}(t)$ необходимо знать значения $z(s)$ на всем промежутке $t \leq s \leq t_1$. Другими словами, текущее значение оптимального управления требует знания будущих значений желаемой выходной величины. В связи с этим для реализации оптимальной системы потребуются устройства упреждения¹⁾.

Перейдем в заключение к изучению задачи регулирования в пространстве состояний для стационарной системы на бесконечном промежутке времени. Иначе говоря, предположим, что $A(t) = A$, $B(t) = B$, $\rho(t) = \rho$, $\sigma(t) = \sigma$, $X = Y$, $C(t) = I$, а также что $z(t) = 0$, $\varphi = 0$, $T_1 = -\infty$, $T_2 = \infty$. Такая система описывается уравнением

$$(5.46) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

а функционал качества принимает вид

$$(5.47) \quad \tilde{J}(t_0, x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\|x_u(t)\|_p^2 + \|u(t)\|_q^2] dt.$$

Однако, учитывая стационарность этой системы, а также постоянство ρ и σ , мы сразу видим (воспользовавшись сдвигом во времени),

¹⁾ Эти результаты в несколько менее общей форме появились впервые в работе Калмана [1963а]. Много интересных примеров можно найти в книге Атанаса и Фалба [1966], а некоторые результаты — в работе Фалба и Клейнмана [1966].

что можно положить $t_0 = 0$ и, следовательно, рассматривать функционал качества

$$(5.48) \quad J(x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\|x_u(t)\|_p^2 + \|u(t)\|_G^2] dt.$$

Начнем со следующей леммы.

(5.49) **Лемма.** Пусть $J_T(x_0, u(\cdot))$ — функционал качества вида

$$(5.50) \quad J_T(x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T [\|x_u(t)\|_p^2 + \|u(t)\|_G^2] dt,$$

а $\pi(\cdot; T)$ — решение уравнения Риккати, соответствующее этому функционалу качества. Обозначим $\pi(0; T)$ через $\hat{\pi}(T)$. Предположим, что

(а) существует $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\pi}(T) = \hat{\pi}$ и что

(б) $\hat{\pi}$ удовлетворяет уравнению

$$(5.51) \quad -\hat{\pi}A - A^*\hat{\pi} + \hat{\pi}S\hat{\pi} - \rho = 0.$$

Тогда наша задача регулирования в пространстве состояний на бесконечном интервале времени имеет решение для любых x_0 из X . Соответствующее оптимальное управление имеет вид

$$(5.52) \quad u^0(x) = -\sigma^{-1}B^*\hat{\pi}x,$$

а оптимальная траектория описывается решением дифференциального уравнения

$$(5.53) \quad \frac{dx(t)}{dt} = (A - S\hat{\pi})x(t)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Наконец, оптимальное качество такой системы вычисляется по формуле

$$(5.54) \quad J(x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \langle x_0, \hat{\pi}x_0 \rangle.$$

Доказательство. Прежде всего убедимся в следующем:

$$(5.55) \quad J(x_0, u^0(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \|x_0\|_{\hat{\pi}}^2.$$

С этой целью заметим, что задача управления с функционалом качества

$$J^T(x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \|x_u(T)\|_{\hat{\pi}}^2 + J_T(x_0, u(\cdot))$$

имеет решение. Более того, согласно уравнению (5.51), ясно, что $u^0(\cdot)$ является оптимальным управлением для этой задачи и что

$$(5.56) \quad \frac{1}{2} \|x_0\|_{\hat{\pi}}^2 = J^T(x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \|x_{u^0}(T)\|_{\hat{\pi}}^2 + J_T(x_0, u^0(\cdot)).$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2} \|x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geq J_T(x_0, u(\cdot)) \geq \frac{1}{2} \|x_0\|_{\mathcal{H}(T)}^2,$$

и, следовательно, в силу условия (а) соотношение (5.55) справедливо. Пусть теперь $u(\cdot)$ есть некоторое заданное управление и пусть

$$J(x_0, u^0(\cdot)) - J(x_0, u(\cdot)) \geq \delta > 0.$$

Однако если T достаточно велико, то

$$J(x_0, u^0(\cdot)) = \frac{1}{2} \|x_0\|_{\mathcal{H}(T)}^2 + \frac{\delta}{2} \geq J_T(x_0, u(\cdot)) + \delta.$$

Это приводит к противоречию, что и доказывает нашу лемму.

(5.57) **Следствие.** При выполнении условий леммы (5.49) система (5.53) строго $\hat{\mathcal{H}}$ -устойчива¹⁾, и, в частности, если $\hat{\mathcal{H}}$ положительно определена, то система (5.53) строго устойчива.

Доказательство. Воспользуйтесь уравнениями (5.55) и (5.56).

Отметим, что если рассматриваемая динамическая система конечномерна (т. е. если конечномерны X и U), то условия леммы (5.49) удовлетворяются для полностью управляемых систем. Дополнительные подробности можно найти в работе Калмана [1960a]. Вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения Риккати в общем случае по-прежнему остается открытым²⁾.

3.6 Фильтр Калмана — Бюси

Рассмотрим вопрос об определении «наилучшего» (в смысле минимума математического ожидания квадратичной ошибки) линейного фильтра для «сигнала», генерируемого некоторым линейным стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Приведенный здесь вывод, основывающийся на работах Калмана и Бюси [1961] и Фалба [1967], является существенно эвристическим. Действительно, строгие доказательства потребовали бы привлечения понятий, выходящих за рамки этой книги. Однако с точностью до использования дельта-функций приведенный вывод является строгим для конечномерного случая, а все необходимые подробности для случая более общих гильбертовых пространств можно найти в работе Фалба [1967]. Материал

¹⁾ Система называется *строго $\hat{\mathcal{H}}$ -устойчивой*, если вдоль ее траекторий $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{H}}}$ асимптотически стремится к нулю.

²⁾ Доказательство Калмана [1960a] в этом случае не годится, так как бесконечномерная система может быть полностью управляемой, а множество моментов времени попадания из заданных состояний в начало координат может быть неограниченным.

этого параграфа требует несколько более глубоких и широких математических познаний, чем это нужно в других разделах книги, посвященных теории управления. В частности, читатель должен иметь представление о теории меры, теории интегрирования в банаховых пространствах (Данфорд, Шварц [1958]) и теории стохастических процессов (Дуб [1953]).

Пусть $(\Omega, \mathcal{P}, \mu)$ — вероятностное пространство, где \mathcal{P} есть σ -алгебра борелевых множеств, а μ — мера. Если X — банахово пространство, а $x(\cdot)$ — некоторая измеримая¹⁾ функция из Ω в X , то $x(\cdot)$ называют *случайной величиной*. Если $x(\cdot)$ является интегрируемой случайной величиной, то говорят, что у $x(\cdot)$ имеется математическое ожидание (или среднее), обозначаемое через $E\{x(\cdot)\}$,

$$E\{x(\cdot)\} = \int_{\Omega} x(\omega) d\mu.$$

Заметим, что $E\{x(\cdot)\}$ также принадлежит банахову пространству X . Начиная с этого момента мы всегда будем рассматривать только такие случайные величины, у которых есть математические ожидания, и будем обычно опускать символ ω , указывающий в явном виде на зависимость случайных величин от исхода случайного эксперимента.

Для того чтобы построить теорию фильтра Калмана—Бюси, нам понадобятся еще несколько новых понятий. В частности, нам нужно ввести определения таких понятий, как стохастический процесс, корреляционная матрица, ортогональные приращения и стохастический интеграл. Грубо говоря, стохастический процесс представляет собой некоторое параметризованное семейство случайных величин. Дадим более точное определение.

(6.1) Определение. Пусть T — некоторый промежуток вещественной оси, а X — банахово пространство. Тогда функция $x(t, \omega)$ из $T \times \Omega$ в X , измеримая относительно пары (t, ω) (для лебеговой меры на T), называется *стохастическим процессом*²⁾.

Говоря о стохастических процессах, мы часто будем обозначать $x(t, \omega)$ через $x(t)$.

Предположим теперь, что H есть гильбертово пространство и что h_1 и h_2 принадлежат H . Определим тогда $h_1 \circ h_2$ как элемент $\mathcal{L}(H, H)$, потребовав, чтобы

$$(6.2) \quad (h_1 \circ h_2) h = h_1 \langle h_2, h \rangle,$$

¹⁾ Напомним, что функция $x(\cdot)$, определенная на Ω и принимающая значения из X , называется *измеримой*, если $x(\cdot)$ существенно сепарабельна и если $x^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{P}$ для любых открытых множеств \mathcal{O} из X (Данфорд, Шварц [1958]).

²⁾ Это определение несколько уже обычного (Дуб [1953]), но для наших целей этого достаточно.

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H . Заметим, что если $H = \mathbb{R}_n$ (т. е. если H конечномерно), то $h_1 \circ h_2$ соответствует матрица $h_1 h_2'$. Более того, справедливо следующее предложение.

(6.3) **Предложение.** Пусть H — гильбертово пространство, а ψ — отображение из $H \oplus H$ в $\mathcal{L}(H, H)$, удовлетворяющее условию

$$(6.4) \quad \psi(h_1, h_2) = h_1 \circ h_2.$$

Тогда ψ обладает следующими свойствами:

(а) отображение ψ линейно как по h_1 , так и по h_2 ;

(б) отображение ψ непрерывно, так как

$$(6.5) \quad \|\psi(h_1, h_2)\| = \|h_1\| \cdot \|h_2\|;$$

(с) $\psi(h_1, h_2)^* = \psi(h_2, h_1) = h_2 \circ h_1$, и, следовательно, $\psi(h_1, h_2)$ симметрично;

(д) если h принадлежит H , то

$$(6.6) \quad \langle h, \psi(h_1, h_2) h \rangle = \langle h, h_1 \rangle \cdot \langle h, h_2 \rangle.$$

Но, так как H^* можно отождествлять с H , последнее соотношение можно записать в виде

$$h^*(h_1 \circ h_2) h = (h^* h_1) \cdot (h^* h_2),$$

где h^* представляет собой h , рассматриваемый как элемент из H^* .

Доказательство. Свойства (а), (с) и (д) очевидны. Что же касается свойства (б), то нужно просто заметить, что

$$\begin{aligned} \|\psi(h_1, h_2)\| &= \sup_{\|h\| \leq 1} \|(h_1 \circ h_2) h\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|h_1 \langle h_2, h \rangle\| = \\ &= \|h_1\| \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle h_2, h \rangle| = \|h_1\| \cdot \|h_2\| \end{aligned}$$

(см., например, Канторович, Акилов [1959]).

Предложение (6.3) приводит к следующему.

(6.7) **Предложение.** Пусть $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ суть случайные величины, принимающие значения в H . Тогда функция $x(\cdot) \circ y(\cdot)$ принимает значения в $\mathcal{L}(H, H)$ и измерима.

Доказательство. Поскольку $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ почти всюду сепарабельны, ясно, что почти всюду сепарабельно и $x(\cdot) \circ y(\cdot)$, а этого достаточно, чтобы доказать, что если \mathcal{O} есть некоторое открытое подмножество в $\mathcal{L}(H, H)$, то $[x(\cdot) \circ y(\cdot)]^{-1}(\mathcal{O})$ принадлежит \mathcal{P} (Данфорд, Шварц [1958]). Теперь имеем

$$\{\omega: \psi(x(\omega), y(\omega)) \in \mathcal{O}\} = \{\omega: (x(\omega), y(\omega)) \in \psi^{-1}(\mathcal{O})\},$$

¹⁾ Заметим, что отсюда же следует, что линейное преобразование $h_1 \circ h_2 = \psi(h_1, h_2)$ действительно принадлежит пространству $\mathcal{L}(H, H)$.

а так как ψ непрерывно, то $\psi^{-1}(O)$ является открытым множеством в $H \oplus H$. Таким образом,

$$\psi^{-1}(O) = \bigcup (\mathcal{O}_i \times \tilde{\mathcal{O}}_i),$$

где \mathcal{O}_i и $\tilde{\mathcal{O}}_j$ — открытые множества в H . Но отсюда находим

$$\begin{aligned} \{\omega: (x(\omega), y(\omega)) \in \psi^{-1}(O)\} &= \bigcup [\{\omega: x(\omega) \in \mathcal{O}_i\} \cap \{\omega: y(\omega) \in \tilde{\mathcal{O}}_i\}] = \\ &= \bigcup x^{-1}(\mathcal{O}_i) \cap y^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_i), \end{aligned}$$

а утверждение (6.7) получается как следствие измеримости $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$.

Теперь можно перейти к следующим определениям.

(6.8) **Определение.** Пусть x и y — случайные величины, принимающие значения из H^1 . Тогда коэффициентом корреляции x и y , $\text{cov}[x, y]$, называется такой элемент (если он существует) из $\mathcal{L}(H, H)$, что

$$(6.9) \quad \text{cov}[x, y] = E\{x \circ y\} - E\{x\} \circ E\{y\}.$$

Если $\text{cov}[x, y] = 0$, то случайные величины x и y называют некоррелированными.

(6.10) **Определение.** Пусть $x(t)$ — случайный процесс, принимающий значения из H . Тогда $x(t)$ называют процессом с ортогональными приращениями, если

$$(a) \quad E\{\| [x(t) - x(s)] \circ [x(t) - x(s)] \| \} < \infty \text{ для } t, s \in T.$$

$$(b) \quad E\{[x(t_2) - x(s_2)] \circ [x(t_1) - x(s_1)]\} = 0 \text{ для } s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2.$$

Если же $E\{[x(t) - x(s)] \circ [x(t) - x(s)]\}$ зависит только от $t - s$, то $x(t)$ называют процессом со стационарными (в широком смысле) приращениями (Дуб [1953]).

Докажем теперь один результат теории процессов с ортогональными приращениями.

(6.11) **Предложение.** Пусть $x(t)$ есть некоторый процесс с ортогональными приращениями и пусть $\lambda(t)$ определяется по формуле

$$(6.12) \quad \lambda(t) = \begin{cases} E\{[x(t) - x(t_0)] \circ [x(t) - x(t_0)]\}, & t \geq t_0, \\ -E\{[x(t) - x(t_0)] \circ [x(t) - x(t_0)]\}, & t < t_0. \end{cases}$$

¹⁾ Обратите внимание на то, что, согласно сделанным ранее замечаниям, мы опускаем здесь указания на зависимость от ω .

Тогда

$$(6.13) \quad E\{[x(t) - x(s)] \circ [x(t) - x(s)]\} = \lambda(t) - \lambda(s), \quad s < t,$$

а $\lambda(t) - \lambda(s)$ является положительным элементом из $\mathcal{L}(H, H)$ (в этом смысле $\lambda(\cdot)$ представляет собой монотонно неубывающую функцию).

Доказательство. Простые выкладки, которые мы предоставляем читателю, подтверждают справедливость предложения (6.13). Согласно же утверждению (6.3с), $\lambda(t) - \lambda(s)$ симметрично. Поэтому если $h \in H$, то

$$\begin{aligned} \langle [\lambda(t) - \lambda(s)] h, h \rangle &= \langle E\{[x(t) - x(s)] \circ [x(t) - x(s)]\} h, h \rangle = \\ &= \langle E\{[x(t) - x(s)] \langle [x(t) - x(s)], h \rangle\}, h \rangle = \\ &= E\{[x(t) - x(s)], h \rangle \cdot \langle [x(t) - x(s)], h \rangle\} = 0, \end{aligned}$$

так что $\lambda(t) - \lambda(s)$ положительно.

Итак, если $x(t)$ есть некоторый процесс с ортогональными приращениями, то $\lambda(t)$ можно использовать для построения меры, принимающей значения в $\mathcal{L}(H, H)$, а это позволит нам построить стохастический интеграл, основанный на такой мере (Дуб [1953]). Однако мы существенно пожертвуем общностью и ограничимся рассмотрением процессов, аналогичных винеровским. Точнее говоря, мы будем базироваться на следующем определении.

(6.14) **Определение.** Пусть $w(t)$ есть некоторый принимающий значения из H случайный процесс с тождественно равным нулю математическим ожиданием (т. е. $E\{w(t)\} = 0$ при всех t). Пусть $w(t)$ является процессом с ортогональными приращениями, пусть $w(t)$ почти всюду (относительно ω) непрерывно, пусть

$$(6.15) \quad E\{[w(t) - w(s)] \circ [w(t) - w(s)]\} = |t - s| W,$$

где W — некоторый положительно определенный элемент из $\mathcal{L}(H, H)$, такой, что для ортонормированного базиса H справедливо $Wh_\alpha = \lambda_\alpha h_\alpha$ (т. е. W «диагонально»), и пусть

$$(6.16) \quad E\{\langle w(t_2) - w(s_2), S[w(t_1) - w(s_1)] \rangle\} = 0$$

каждый раз, когда $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, а $S \in \mathcal{L}(H, H)$ ¹⁾. Тогда $w(t)$ называют *винеровским процессом*.

Введем теперь понятие стохастического интеграла, опирающееся на определение (6.14). Это позволит нам говорить о стохастических

¹⁾ Уравнение (6.16) описывает условие «независимости», излишнее в конечно-мерном случае.

дифференциальных уравнениях и поставить задачу фильтрации. Предположим, что $S(t)$ представляет собой ступенчатую функцию из T в $\mathcal{L}(H, H)$ и что $w(t)$ есть некоторый винеровский процесс. Другими словами, найдутся такие $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ из T и S_j , $j = 1, \dots, n$, из $\mathcal{L}(H, H)$, что

$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ S_j, & t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0, & t \geq t_n. \end{cases}$$

Определим тогда (стохастический) интеграл $S(t)$ по $dw(t)$, потребовав, чтобы

$$\int S(t) dw(t) = \sum_{j=1}^n S_j [w(t_j) - w(t_{j-1})].$$

Заметим, что такой интеграл является случайной величиной, принимающей значения из H и имеющей нулевое математическое ожидание¹⁾.

(6.17) **Лемма.** Пусть $R(t)$ и $S(t)$ являются двумя принимающими значения из $\mathcal{L}(H, H)$ ступенчатыми функциями. Тогда

$$(6.18) \quad E \left\{ \left[\int R(t) dw(t) \right] \circ \left[\int S(t) dw(t) \right] \right\} = \int R(t) WS^*(t) dt,$$

и, следовательно,

$$(6.19) \quad E \left\{ \left\| \int R(t) dw(t) \right\| \cdot \left\| \int S(t) dw(t) \right\| \right\} \leq \int \|R(t)\| \|W\|_{tr} \|S(t)\| dt.$$

Доказательство этой леммы сводится к простым выкладкам, которые мы оставляем читателю.

Опираясь на лемму (6.17), мы можем определить стохастический интеграл таким же способом, как это сделано в книге Дуба [1953]. Другими словами, если $\Phi(t)$ принадлежит $L^2(T, \mathcal{L}(H, H))$, так что

$$\int \|\Phi(t)\|^2 dt < \infty,$$

то (Данфорд, Шварц [1958]) $\Phi(t)$ является пределом последовательности ступенчатых функций $S_m(t)$, т. е.

$$(6.20) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int \|\Phi(t) - S_m(t)\|^2 dt = 0,$$

¹⁾ Все эти утверждения относительно стохастического интеграла справедливы лишь почти всюду, но мы здесь не будем задерживаться на этом.

и мы можем определить $\int \Phi(t) d\omega(t)$, положив

$$\int \Phi(t) d\omega(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int S_m(t) d\omega(t),$$

т. е. потребовав, чтобы

$$(6.21) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E \left\{ \left\| \int \Phi(t) d\omega(t) - \int S_m(t) d\omega(t) \right\|^2 \right\} = 0.$$

Заметим, что соотношение (6.20) гарантирует справедливость соотношения (6.21) в силу неравенства (6.19). Более того, $\int \Phi(t) d\omega(t)$ также является принимающей значения из H случайной величиной с нулевым математическим ожиданием (Данфорд, Шварц [1958]).

Заметим теперь, что если $T = [t_0, t_1]$ (или $[t_0, \infty)$), то

$$(6.22) \quad x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s), \quad t \in [t_0, t_1]$$

является случайным процессом, принимающим значения из H . При подходящих определениях (Фалб [1967]) $x(t)$ оказывается мартингалом. И хотя мы не будем развивать эту тему здесь, покажем все же, что $x(t)$ является мартингалом «в широком смысле».

(6.23) Предложение. Пусть $x(t)$ является стохастическим интегралом из уравнения (6.22). Тогда $x(t)$ принадлежит $L^2(\Omega, H)$ и $x(t_2) - x(s_2)$ ортогонально $x(t)$ при $t \leq s_2 < t_2$ (относительно структуры $L^2(\Omega, H)$), т. е.

$$(6.24) \quad E \{ \langle x(t_2) - x(s_2), x(t) \rangle \} = 0.$$

Другими словами, $x(t)$ представляет собой мартингал в широком смысле (Дуб [1953]).

Доказательство. Неравенство (6.19) ясно показывает, что $x(t) \in L^2(\Omega, H)$. Заметим теперь, что соотношение (6.24) справедливо для ступенчатых функций в силу условия (6.16) и того факта, что

$$x(t_2) - x(s_2) = \int_{s_2}^{t_2} \Phi(s) d\omega(s).$$

Если теперь $S_m(s)$ является последовательностью ступенчатых функций, сходящихся к $\Phi(s)$, то

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \left\langle \int_{s_2}^{t_2} \Phi(s) d\omega(s), \int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s) \right\rangle - \left\langle \int_{s_2}^{t_2} S_m(s) d\omega(s), \int_{t_0}^t S_m(s) d\omega(s) \right\rangle \right\} \right| \leq \\ & \leq E \left\{ \left| \left\langle \int_{s_2}^{t_2} [\Phi(s) - S_m(s)] d\omega(s), \int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s) \right\rangle + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\langle \int_{s_2}^{t_2} S_m(s) d\omega(s), \int_{t_0}^t [\Phi(s) - S_m(s)] d\omega(s) \right\rangle \right| \right\} \leq \\ & \leq E \left\{ \left\| \int_{s_2}^{t_2} [\Phi(s) - S_m(s)] d\omega(s) \right\| \cdot \|x(t)\| + \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_{s_2}^{t_2} S_m(s) d\omega(s) \right\| \cdot \|x(t) - x_m(t)\| \right\}^1 \leq \\ & \leq E \{\|x(t_2) - x_m(t_2)\| \cdot \|x(t)\|\} + E \{\|x(s_2) - x_m(s_2)\| \cdot \|x(t)\|\} + \\ & \quad + E \{\|x_m(t_2) - x_m(s_2)\| \cdot \|x(t) - x_m(t)\|\}. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Гёльдера (Данфорд, Шварц [1958]) можно показать, что отсюда следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \{\langle x(t_2) - x(s_2), x(t) \rangle - \langle x_m(t_2) - x_m(s_2), x_m(t) \rangle\} = 0,$$

и поэтому, так как $E \{\langle x_m(t_2) - x_m(s_2), x_m(t) \rangle\} = 0$ при всех m , соотношение (6.24) выполняется.

(6.25) Следствие. Если $s \leq t$, то

$$E \{\|x(s)\|^2\} \leq E \{\|x(t)\|^2\}.$$

Это следствие доказано в книге Дуба [1953].

Заметим теперь, что если $S(t)$ — ступенчатая функция, то

$$x(t) = \int_{t_0}^t S(s) d\omega(s)$$

непрерывно по t (почти для всех ω). Поэтому в конечномерном случае относительно просто доказать, что стохастический интеграл (6.22) также непрерывен по t (почти для всех ω) (Дуб [1953]). Для того чтобы избежать чрезмерных сложностей, предположим, что

¹⁾ Здесь $x_m(t) = \int_{t_0}^t S_m(s) d\omega(s)$.

все функции $\Phi(t)$, входящие в стохастические интегралы, таковы, что $x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s)$ непрерывна по t (для почти всех ω).

Такие функции называются *s-интегрируемыми*¹⁾.

Предположим теперь, что $x(t_0)$ — некоторая принимающая значения из H случайная величина с $E\{\|x(t_0)\|^2\} < \infty$, и пусть $A(t)$ — простая функция из T в $\mathcal{L}(H, H)$, а $M(t)$ — некоторая *s-интегрируемая* функция из T в $\mathcal{L}(H, H)$. Тогда мы можем рассматривать следующее (стохастическое) интегральное уравнение:

$$(6.26) \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) x(s) ds + \int_{t_0}^t M(s) d\omega(s),$$

которое часто записывают в виде

$$(6.27) \quad dx = A(t) x dt + M(t) d\omega,$$

или на более интуитивном уровне — в виде

$$(6.28) \quad \dot{x} = A(t) x + M(t) \xi(t),$$

где $\xi(t)$ есть «белый шум». Если $M(t)$ имеет вид $B(t)\sigma(t)$, то мы говорим о $u(t) = \sigma(t)\xi(t)$ как о «белом шуме» с корреляционной матрицей

$$(6.29) \quad \text{cov}[u(t), u(\tau)] = \sigma(t)\sigma^*(t)\delta(t-\tau),$$

где $\delta(\cdot)$ есть дельта-функция Дирака. Естественно, что соотношение (6.29) нужно понимать как чисто формальное. Возвращаясь к уравнению (6.26), мы сформулируем следующую теорему.

(6.30) **Теорема.** Пусть $x(t_0)$ есть принимающая значения из H случайная величина, у которой $E\{\|x(t_0)\|^2\} < \infty$. Пусть $A(t)$ — простая функция из T в $\mathcal{L}(H, H)$, а $M(t)$ есть *s-интегрируемая* функция из T в $\mathcal{L}(H, H)$. Обозначим через $\Phi(t, t_0)$ переходное отображение (нестохастического) дифференциального уравнения

$$\dot{h} = A(t)h$$

(см. Дьедонне [1960] или § 2.2), и пусть $\Phi(t_0, s)M(s)$ является *s-интегрируемой*. Тогда уравнение (6.26) имеет (существенно однозначное) решение $x(t)$, определяемое по формуле

$$(6.31) \quad x(t) = \Phi(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s) M(s) d\omega(s) \right].$$

Более того, $E\{\|x(t)\|^2\} < \infty$.

¹⁾ Условия *s-интегрируемости* приведены у Фалба [1968a].

Доказательство. Без потери общности полагаем $x(t_0) = 0$, что возможно, поскольку

$$x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \Phi(s, t_0) x(t_0) ds = \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

(см. Дьедонне [1960]). В этом случае нам нужно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t A(s) \Phi(s, t_0) \left[\int_{t_0}^s \Phi(t_0, \tau) M(\tau) d\omega(\tau) \right] ds + \int_{t_0}^t M(s) d\omega(s) = \\ = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s) M(s) d\omega(s). \end{aligned}$$

Положим

$$\psi(s) = \int_{t_0}^s \Phi(t_0, \tau) M(\tau) d\omega(\tau)$$

и заметим, что $\psi(s)$ непрерывно¹⁾. Заметим также, что $A(s)\Phi(s, t_0) = d\Phi(s, t_0)/ds$ и что существует такое разбиение $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t$ промежутка $[t_0, t]$, что

$$(6.32) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\| \int_{t_0}^t \frac{d\Phi(s, t_0)}{ds} \psi(s) ds - \sum_1^n [\Phi(a_i, t_0) - \Phi(a_{i-1}, t_0)] \psi(a_i) \right\| = 0,$$

где $a_{i-1} \leq \alpha_i \leq a_i$ и $\mu = \sup |a_i - a_{i-1}|$. Но, так как

$$\begin{aligned} \sum_1^n [\Phi(a_i, t_0) - \Phi(a_{i-1}, t_0)] \psi(a_i) = \\ = \Phi(t, t_0) \psi(t) - \sum_0^{n-1} \Phi(a_i, t_0) [\psi(a_{i+1}) - \psi(a_i)] = \\ = \Phi(t, t_0) \psi(t) - \sum_0^{n-1} \int_{\alpha_i}^{a_{i+1}} \Phi(a_i, t_0) \Phi(t_0, s) M(s) d\omega(s) \end{aligned}$$

и так как $\|\Phi(a_i, t_0) \Phi(t_0, s) - I\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и каждом i , мы можем заключить, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left\| \sum_0^{n-1} \int_{\alpha_i}^{a_{i+1}} \Phi(a_i, t_0) \Phi(t_0, s) M(s) d\omega(s) - \int_{t_0}^t M(s) d\omega(s) \right\| = 0.$$

¹⁾ В дальнейшем мы не будем каждый раз упоминать о том, что все утверждения справедливы «почти всюду в пространстве Ω ».

Воспользовавшись соотношением (6.32), находим

$$(6.33) \quad \int_{t_0}^t A(s) \Phi(s, t_0) \Psi(s) ds + \int_{t_0}^t m(s) dw(s) = \\ = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s) M(s) dw(s).$$

Справедливость последнего утверждения теоремы очевидна.

(6.34) **Следствие.** Если $M(s)$ непрерывно дифференцируема по s , то $M(s)$ является s -интегрируемой и

$$(6.35) \quad \int_{t_0}^t M(s) dw(s) = M(t) w(t) - M(t_0) w(t_0) - \int_{t_0}^t M'(s) w(s) ds.$$

Доказательство этого следствия основано на рассуждениях, аналогичных использованным при переходе от соотношения (6.32) к соотношению (6.33). Подробности доказательства можно найти в работе Фалба [1968a].

Теперь мы готовы к тому, чтобы поставить задачу фильтрации. Предположим, что «полезный сигнал» $x(t)$ генерируется уравнением

$$(6.36) \quad dx = A(t) x dt + B(t) q(t) dw$$

и что «наблюдаемый сигнал» удовлетворяет уравнению

$$(6.37) \quad dz = C(t) x dt + r(t) dw_1,$$

где $R(t) = r(t) w_1 r^*(t)$ положительно определено,

$$\text{cov}[w(t), w_1(\tau)] = 0 \quad \text{и} \quad E\{\langle w(t), w_1(\tau) \rangle\} = 0.$$

На более интуитивном уровне в таком случае часто говорят, что наблюдается сигнал z , удовлетворяющий уравнению

$$\dot{z} = C(t) x + v(t),$$

где $v(t)$ — так называемый «белый шум», корреляционная функция которого есть

$$\text{cov}[v(t), v(\tau)] = R(t) \delta(t - \tau).$$

Сформулируем теперь задачу фильтрации в следующем виде.

(6.38) **Задача фильтрации.** По заданному $z(s)$ для $t_0 \leq s \leq t$ построить оценку $\hat{x}(t_1|t)$ случайной функции $x(t_1)$ вида

$$(6.39) \quad \hat{x}(t_1|t) = \int_{t_0}^t A(t_1, s) dz(s) = \int_{t_0}^t A(t_1, s) C(s) x(s) ds + \\ + \int_{t_0}^t A(t_1, s) r(s) dw_1(s),$$

где ограниченная и принимающая значения из пространства линейных преобразований функция $A(\cdot, \cdot)$ интегрируема по обоим аргументам, а оценка $\hat{x}(t_1|t)$ должна быть такой, что

$$(6.40) \quad E\{\langle x^*, x(t_1) - \hat{x}(t_1|t) \rangle^2\}, \quad x^* \in H^* = H,$$

оказывается минимальной относительно всевозможных x^* , т. е. минимизирует математическое ожидание квадратичной ошибки любого линейного функционала.

Следующая теорема, в которой появляется уравнение Винера — Хопфа, предоставляет необходимые и достаточные условия того, что $\hat{x}(t_1|t)$ является решением задачи фильтрации.

(6.41) **Теорема (уравнение Винера — Хопфа).** Пусть

$$\tilde{x}(t_1|t) = x(t_1) - \hat{x}(t_1|t).$$

Тогда $\hat{x}(t_1|t)$ является решением задачи фильтрации тогда и только тогда, когда

$$(6.42) \quad E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ [z(\sigma) - z(\tau)]\} = 0$$

для всех σ и τ , $t_0 \leq \tau < \sigma \leq t$, или, что то же, тогда и только тогда, когда

$$(6.43) \quad \text{cov}[x(t_1), z(\sigma) - z(\tau)] - \text{cov}\left[\int_{t_0}^t A(t_1, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau)\right] = 0$$

при всех σ и τ , $t_0 \leq \tau < \sigma \leq t$.

Доказательство. Пусть x^* — некоторый элемент пространства $H^* = H$, а $X(x^*)$ — пространство всевозможных вещественных случайных величин вида $\langle x^*, x(\cdot) \rangle$, где $x(\cdot) \in L^2(\Omega, H)$. Скалярное произведение в $X(x^*)$ имеет вид $E\{\langle x^*, x(\cdot) \rangle \cdot \langle x^*, y(\cdot) \rangle\}$. Обозначим через $U(x^*)$ подпространство пространства $X(x^*)$, порождаемое элементами вида

$$\langle x^*, y(a) \rangle = \left\langle x^*, \int_{t_0}^a B(t_1, s) dz(s) \right\rangle, \quad a \leq t,$$

где функция $B(t_1, s)$ интегрируема¹⁾.

Согласно известной лемме об ортогональных проекциях (см., например, Данфорд, Шварц [1958]), $\hat{x}(t_1|t)$ является решением

¹⁾ Заметим, что $U(x^*)$ есть подпространство пространства $X(x^*)$, порожаемое элементами вида $\left\langle x^*, \int_{t_0}^t C(t_1, s) dz(s) \right\rangle$, где $C(t_1, s)$ интегрируема, так как интегрируемость $B(t_1, s)$, $t_0 \leq s \leq a$, гарантирует, что $C(t_1, s) = B(t_1, s)$, $t_0 \leq s \leq a$, и что $C(t_1, s) = 0$, $a < s \leq t$, так что $C(t_1, s)$ также интегрируема.

задачи фильтрации тогда и только тогда, когда $\hat{x}(t_1|t)$ ортогонально $U(x^*)$ относительно структуры $X(x^*)$ при произвольном выборе x^* . Другими словами, $\hat{x}(t_1|t)$ является решением задачи фильтрации тогда и только тогда, когда при всех x^*

$$E\{\langle x^*, \tilde{x}(t_1|t) \rangle \langle x^*, y(a) \rangle\} = 0,$$

где

$$(6.44) \quad y(a) = \int_{t_0}^a B(t_1, s) dz(s), \quad a \leq t.$$

Предположим теперь, что соотношение (6.42) выполняется. Заметим, что, согласно уравнению (6.6),

$$E\{\langle x^*, \tilde{x}(t_1|t) \rangle \langle x^*, y(a) \rangle\} = x^* E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ y(a)\} x.$$

Однако $y(a)$ из этого уравнения задается формулой (6.44). Поэтому, если $B(t_1, s)$ — ступенчатая функция, то

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ y(a)\} &= \Sigma E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ B_j[z(\sigma_j) - z(\tau_j)]\} = \\ &= \Sigma E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ [z(\sigma_j) - z(\tau_j)]\} B_j^* = 0. \end{aligned}$$

Но отсюда (например, согласно неравенству Гёльдера) при любом $y(a)$, удовлетворяющем соотношению (6.44), сразу находим, что $E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ y(a)\} = 0$, и, следовательно, при всех x^* имеем

$$x^* E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ y(a)\} x = 0.$$

Таким образом, $\hat{x}(t_1|t)$ есть решение задачи фильтрации.

Но, с другой стороны, предположим, что $\hat{x}(t_1|t)$ является решением задачи фильтрации. Предположим затем, что соотношение (6.42) не имеет места, так что

$$(6.45) \quad E\{\tilde{x}(t_1|t) \circ [z(\sigma) - z(\tau)]\} = \text{cov}[\tilde{x}(t_1|t), z(\sigma) - z(\tau)] \neq 0$$

при некоторых σ и τ , $t_0 \leq \tau < \sigma \leq t$. Если определить $B(t_1, s)$, положив

$$B(t_1, s) = \begin{cases} 0, & s < \tau, \\ \text{cov}[\tilde{x}(t_1|t), z(\sigma) - z(\tau)], & \tau \leq s \leq \sigma, \\ 0, & s > \sigma, \end{cases}$$

то $B(t_1, s)$ интегрируема и

$$y(t) = \int_{t_0}^t B(t_1, s) dz(s) = \text{cov}[\tilde{x}(t_1|t), z(\sigma) - z(\tau)] \cdot [z(\sigma) - z(\tau)].$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 (6.46) \quad E \{ \langle x^*, \tilde{x}(t_1 | t) \rangle \langle x^*, y(t) \rangle \} &= \\
 &= x^* E \{ \tilde{x}(t_1 | t) \circ y(t) \} x = \\
 &= x^* E \{ \tilde{x}(t_1 | t) \circ \text{cov} [\tilde{x}(t_1 | t), z(\sigma) - z(\tau)] [z(\sigma) - z(\tau)] \} x = \\
 &= x^* \text{cov} [\tilde{x}(t_1 | t), z(\sigma) - z(\tau)] \text{cov} [\tilde{x}(t_1 | t), z(\sigma) - z(\tau)]^* x.
 \end{aligned}$$

Однако, согласно соотношению (6.45), правая часть уравнения (6.46) при некотором x не обращается в нуль, что приводит к противоречию. Таким образом, теорема (6.41) доказана.

Теоремой (6.41) и некоторыми свойствами корреляционных матриц можно воспользоваться для того, чтобы найти сразу уравнение, решающее задачу фильтрации. Этим мы и займемся, начав с нескольких лемм.

(6.47) **Лемма.** Пусть $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ принадлежат $L^2(T, \mathcal{L}(H, H))$. Тогда

$$(6.48) \quad \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s), \int_{t_0}^t \Psi(s) d\omega_1(s) \right] = 0$$

и

$$(6.49) \quad \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \Phi(s) d\omega(s), \int_{t_0}^t \Psi(s) d\omega(s) \right] = \int_{t_0}^t \Phi(s) W \Psi^*(s) ds.$$

Эта лемма очень просто получается из леммы (6.17) и доказана в работе Фалба [1967].

(6.50) **Лемма.** Предположим, что $\text{cov}[\omega(t), x(t_0)] = 0$ при всех t и что $K(t, s)$ интегрируемо по $d\omega(s)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (6.51) \quad \text{cov} \left[\int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &= \\
 &= \int_{t_0}^{\sigma} K(t, s) W \cdot q^*(s) B^*(s) \Phi_{\sigma}^*(s) ds,
 \end{aligned}$$

где

$$(6.52) \quad \Phi_{\sigma}(s) = \int_s^{\sigma} C(a) \Phi(a, s) da,$$

а $\Phi(\cdot, \cdot)$ является переходным отображением системы из теоремы (6.30).

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} z(\sigma) - z(\tau) &= \int_{\tau}^{\sigma} C(s) x(s) ds + \int_{\tau}^{\sigma} r(s) d\omega_1(s) = \\ &= \int_{\tau}^{\sigma} C(s) \Phi(s, t_0) \left[x_0 + \int_{t_0}^s \Phi(t_0, a) B(a) q(a) d\omega(a) \right] ds + \int_{\tau}^{\sigma} r(s) d\omega_1(s). \end{aligned}$$

Но так как $\text{cov}[w(t), x_0] = 0$, необходимо, согласно уравнению (6.48), чтобы

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &= \\ &= \text{cov} \left\{ \int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), \int_{\tau}^{\sigma} C(s) \left[\int_{t_0}^s \Phi(s, a) B(a) q(a) d\omega(a) \right] ds \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, задавая $\tilde{C}(s)$ следующим образом:

$$(6.53) \quad \tilde{C}(s) = \begin{cases} 0, & s > \sigma, \\ C(s), & \tau \leq s \leq \sigma, \\ 0, & s < \tau, \end{cases}$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &= \\ &= \text{cov} \left\{ \int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), \int_{t_0}^t \left[\int_a^s \tilde{C}(s) \Phi(s, a) ds \right] B(a) q(a) d\omega(a) \right\}, \end{aligned}$$

где замена порядка интегрирования оправдывается подходящей разновидностью теоремы Фубини (Данфорд, Шварц [1958], Дуб [1953], Фалб [1967]). Теперь из уравнения (6.49) и (6.53) следует, что

$$\text{cov} \left[\int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] = \int_{t_0}^{\sigma} K(t, s) W q^*(s) B^*(s) \Phi_s^*(s) ds,$$

а это доказывает нашу лемму.

Пусть теперь $a(t)$ и $b(t)$ — два случайных процесса, у которых $\text{cov}[a(t), b(t)] = h(t)$ («неслучайная» функция). Тогда естествен-

но предположить, что если $\dot{h}(t)$ существует, то

$$\frac{d}{dt} \text{cov} [a(t), b(t)] = \frac{d}{dt} h(t) = \dot{h}(t).$$

Это позволило бы нам доказать следующий результат.

(6.54) **Следствие.** Если $K(t, s)$ непрерывно дифференцируема по t , то для $\sigma < t$ имеем

$$\begin{aligned} (6.55) \quad & \frac{d}{dt} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t K(t, s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] = \\ & = \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right]. \end{aligned}$$

(6.56) **Следствие.** Предположим, что $\text{cov}[w_1(t), x_0] = 0$ для всех t . Тогда при $\sigma < t$ имеем

$$(6.57) \quad \frac{d}{dt} \text{cov}[x(t), z(\sigma) - z(\tau)] = \text{cov}[A(t)x(t), z(\sigma) - z(\tau)].$$

Доказательство. Для доказательства нужно положить $K(t, s) = \Phi(t, s)B(s)q(s)$ и воспользоваться следствием (6.54).

Предположим далее, что $\text{cov}[w(t), x_0] = 0$ и что $\text{cov}[w_1(t), x_0] = 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

(6.58) **Лемма.** Пусть $L(t, s)$ интегрируема по $dz(s)$. Тогда

$$\begin{aligned} (6.59) \quad & \text{cov} \left[\int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] = \\ & = \int_{t_0}^{\sigma} \Psi(t, s) B(s) q(s) W q^*(s) B^*(s) \Phi_{\sigma}^*(s) ds + \\ & + \int_{\tau}^{\sigma} L(t, s) r(s) W_1 r^*(s) ds + \\ & + \int_{t_0}^t L(t, s) C(s) \Phi(s, t_0) ds \text{cov}[x_0, x_0] \int_{\tau}^{\sigma} \Phi^*(s, t_0) C^*(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$(6.60) \quad \Psi(t, s) = \int_s^t L(t, b) C(b) \Phi(b, s) db,$$

а $\Phi_{\sigma}(s)$ задается формулой (6.52).

Доказательство. Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t L(t, s) dz(s) &= \int_{t_0}^t L(t, s) C(s) x(s) ds + \int_{t_0}^t L(t, s) r(s) d\omega_1(s) = \\ &= \int_{t_0}^t L(t, s) C(s) \left[\Phi(s, t_0) x_0 + \int_{t_0}^s \Phi(s, a) B(a) q(a) d\omega(a) \right] ds + \\ &+ \int_{t_0}^t L(t, s) r(s) d\omega_1(s). \end{aligned}$$

Теперь с помощью соотношения (6.48) о «независимости» x_0 от ω и ω_1 и соответствующей теоремы Фубини (Фалб [1967]) мы можем доказать, что

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &= \\ &= \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \psi(t, s) B(s) q(s) d\omega(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] + \\ &+ \int_{\tau}^{\sigma} L(t, s) r(s) W_1 r^*(s) ds + \\ &+ \int_{t_1}^t L(t, s) C(s) \Phi(s, t_0) ds \text{cov} [x_0, x_0] \int_{\tau}^{\sigma} \Phi^*(s, t_0) C^*(s) ds. \end{aligned}$$

После этого остается только воспользоваться леммой (6.50).

(6.61) **Следствие.** Если $L(t, s)$ непрерывно дифференцируема по t , то для $\sigma < t$ имеем

$$\begin{aligned} (6.62) \quad \frac{d}{dt} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &= \\ &= \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial L}{\partial t}(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] + \\ &+ \text{cov} [L(t, t) C(t) x(t), z(\sigma) - z(\tau)]. \end{aligned}$$

Доказательство этого следствия выполняется простыми выкладками, и мы оставляем их читателю.

Все эти леммы и следствия подводят нас к следующей теореме.

(6.63) **Теорема.** Пусть для задачи фильтрации существует решение вида

$$(6.64) \quad \hat{x}(t|t) = \int_{t_0}^t L(t, s) dz(s),$$

где $L(t, s)$ непрерывно дифференцируема по t .

Тогда¹⁾ для $t_0 \leq s \leq t$ справедливо соотношение

$$(6.65) \quad \frac{\partial L}{\partial t}(t, s) = A(t) L(t, s) - L(t, t) C(t) L(t, s).$$

Доказательство. Поскольку $\hat{x}(t|t)$ представляет собой решение задачи фильтрации, согласно уравнению (6.43), имеем

$$\frac{d}{dt} \text{cov}[x(t), z(\sigma) - z(\tau)] \equiv \frac{d}{dt} \text{cov} \left[\int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right].$$

В соответствии с уравнениями (6.57), (6.62) и (6.43) находим

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[A(t) \int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] &\equiv \\ &\equiv \text{cov} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial L}{\partial t}(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right] + \\ &+ \text{cov} \left[L(t, t) C(t) \int_{t_0}^t L(t, s) dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right], \end{aligned}$$

или, что то же,

$$(6.66) \quad \text{cov} \left\{ \int_{t_0}^t \left[A(t) L(t, s) - \frac{\partial L}{\partial t}(t, s) - \right. \right. \\ \left. \left. - L(t, t) C(t) L(t, s) \right] dz(s), z(\sigma) - z(\tau) \right\} = 0.$$

Полагая

$$\Delta(t, s) = A(t) L(t, s) - \frac{\partial L}{\partial t}(t, s) - L(t, t) C(t) L(t, s),$$

мы заметим, что, согласно уравнению (6.66), функция

$$\int_{t_0}^t [L(t, s) + \Delta(t, s)] dz(s) = \hat{y}(t|t)$$

¹⁾ Отметим, что одновременно предполагается положительная определенность $R(t) = r(t) W_1 r^*(t)$.

также удовлетворяет уравнению (6.43) и, следовательно, также является оптимальной оценкой. В силу известной леммы об ортогональных проекциях при любых x^* имеем

$$E\{\langle x^*, \hat{y}(t|t) - \hat{x}(t|t) \rangle^2\} = 0.$$

Другими словами, для всех x справедливо соотношение

$$x^* \operatorname{cov} \left[\int_{t_0}^t \Delta(t, s) dz(s), \int_{t_0}^t \Delta(t, s) dz(s) \right] x = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{cov} \left[\int_{t_0}^t \Delta(t, s) dz(s), \int_{t_0}^t \Delta(t, s) dz(s) \right] = \\ = \operatorname{cov} \left[\int_{t_0}^t \Delta(t, s) C(s) x(s) ds, \int_{t_0}^t \Delta(t, s) C(s) x(s) ds \right] + \\ + \int_{t_0}^t \Delta(t, s) R(s) \Delta^*(t, s) ds. \end{aligned}$$

А так как $R(s)$ является положительно определенным при всех x , мы сразу убеждаемся в том, что $\Delta(t, s) = 0$.

(6.67) **Следствие.** В условиях теоремы $\hat{x}(t)$ ¹⁾ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$(6.68) \quad d\hat{x} = [A(t) - K(t)C(t)] \hat{x} dt + K(t)C(t)x(t) dt + K(t)r(t)dw_1,$$

где $K(t) = L(t, t)$.

Доказательство. Известно, что

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t L(t, s) dz(s) = \int_{t_0}^t L(t, s) C(s) x(s) ds + \int_{t_0}^t L(t, s) r(s) dw_1(s).$$

Однако ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)] x(s) ds = \\ = \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)] \int_{t_0}^s L(s, a) C(a) x(a) da ds + \\ + \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)] \int_{t_0}^s L(s, a) r(a) dw_1(a) ds. \end{aligned}$$

1) Для простоты мы пишем здесь $\hat{x}(t)$ вместо $\hat{x}(t|t)$.

Согласно различным вариантам теоремы Фубини (Данфорд, Шварц [1958], Дуб [1953], Фалб [1967]), имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)] \int_{t_0}^s L(s, a)C(a)x(a)da ds = \\ = \int_{t_0}^t \left\{ \int_a^t [A(s) - K(s)C(s)]L(s, a)ds \right\} C(a)x(a)da, \\ \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)] \int_{t_0}^s L(s, a)r(a)d\omega_1(a)ds = \\ = \int_{t_0}^t \left\{ \int_a^t [A(s) - K(s)C(s)]L(s, a)ds \right\} r(a)d\omega_1(a), \end{aligned}$$

и, следовательно, с учетом уравнения (6.66) находим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [A(s) - K(s)C(s)]\hat{x}(s)ds &= \int_{t_0}^t \left[\int_a^t \frac{\partial L}{\partial s}(s, a)ds \right] dz(a) = \\ &= \int_{t_0}^t [L(t, a) - L(a, a)]dz(a) = \\ &= \hat{x}(t) - \int_{t_0}^t K(s)dz. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует справедливость доказываемого следствия.

(6.69) **Следствие.** В условиях теоремы (6.63) $\hat{x}(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$(6.70) \quad d\hat{x} = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}dt + B(t)q(t)d\omega - K(t)r(t)d\omega_1.$$

Следствия (6.67) и (6.69) составляют основное содержание работы Калмана и Бюси [1961]. Продолжая наши рассуждения, мы могли бы получить и остальные результаты (подробности можно найти в работе Фалба [1967]). В качестве типичного примера приведем еще одну теорему.

(6.71) **Теорема.** Предположим, что условия теоремы (6.63) выполнены. Тогда

$$(6.72) \quad K(t) = P(t)C^*(t)R^{-1}(t),$$

где $P(t)$ является решением уравнения типа Риккати

$$(6.73) \quad \dot{P} = A(t)P + PA^*(t) - PC^*(t)R^{-1}(t)C(t)P + B(t)Q(t)B^*(t)$$

с начальными условиями $P(t_0) = P_0 = \text{cov}[x_0, x_0]$.

Доказательство. Пусть

$$y(s) = \int_{t_0}^s C(a) x(a) da.$$

Тогда путем простых выкладок, предоставляемых читателю, можно убедиться, что при $\sigma < t$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (6.74) \quad & \frac{d}{d\sigma} \text{cov} [\tilde{x}(t), y(\sigma) - y(\tau)] = \\ & = [\psi(t, t_0) - \Phi(t, t_0)] P_0 \Phi^*(\sigma, t_0) C^*(\sigma) + \\ & + \int_{t_0}^t [\Phi(t, s) - \psi(t, s)] B(s) Q(s) B^*(s) \Phi^*(t_0, s) ds \Phi^*(\sigma, t_0) C^*(\sigma) = \\ & = L(t, \sigma) R(\sigma), \end{aligned}$$

где $\psi(t, s)$ определяется согласно уравнению (6.60). В силу нашего основного предположения все члены правой части соотношения (6.74) представляют собой непрерывные функции σ . Поэтому, переходя к пределу при $\sigma \rightarrow t$, мы увидим, что соотношение (6.72) действительно выполняется и что

$$\begin{aligned} (6.75) \quad P(t) = & \left\{ [\Phi(t, t_0) - \psi(t, t_0)] P_0 + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t [\Phi(t, s) - \psi(t, s)] B(s) Q(s) B^*(s) \Phi^*(t_0, s) ds \right\} \Phi^*(t, t_0). \end{aligned}$$

Ясно, что $P(t_0) = P_0$. Читателю остается только продифференцировать уравнение (6.75) по t и получить искомое уравнение (6.73) (заметим, что уравнениями (6.65) и (6.72) часто пользуются при расчетах).

При выполнении условий теоремы (6.63) оптимальный фильтр можно рассматривать и как оптимальный регулятор динамической системы, «дуальной» стохастической системе (6.36) и (6.37), в которой время обращено, исходные преобразования заменены сопряженными, а помехи — неслучайными функциями. Несколько примеров подобного рода разобраны в работе Калмана и Бюси [1961], а детальное исследование предпринято Фалбом в работах [1967 и 1968а] (см. также § 2.6).

4 Необходимые условия оптимальности

В этой главе мы рассмотрим необходимые условия оптимальности, аналогичные известным уравнениям Эйлера в вариационном исчислении (§ 4.1), изучим принцип максимума Понтрягина (§ 4.2), приведем одну простую теорему существования оптимальных управлений (§ 4.3) и сделаем несколько общих замечаний относительно необходимых условий для более широкого класса задач. В § 4.2 мы воспользуемся методами теории возмущений и убедимся, что гамильтонианы опять играют центральную роль. Как мы увидим в гл. 5, принцип максимума Понтрягина, существенно усиливающий необходимые условия оптимальности в случае конечномерной динамической системы, оказывается очень полезным и в задачах конкретного проектирования систем управления. Простая теорема существования, приведенная в § 4.3, основывается на понятиях достижимости и нижней полунепрерывности. В § 4.4 дано сжатое представление о различных изящных и весьма мощных обобщениях принципа максимума, принадлежащих Халкину [1967], Нейштадту [1966, 1967] и Кенону, Каллуму и Полаку [1967] (см. также приложение А).

4.1 Необходимые условия оптимальности

Предположим, что Σ есть гладкая динамическая система и что $f(x, u, t)$ представляет собой производящую функцию системы Σ . Станем предполагать, что само X является некоторым банаховым пространством и что Ω есть некоторое открытое подмножество в пространстве всевозможных простых функций из (T_1, T_2) в \mathcal{B}_U . Зафиксируем на время t_0 из (T_1, T_2) , x_0 из X и $\hat{u}(\cdot)$ из Ω . Обозначим через $\hat{x}(\cdot)$ траекторию системы Σ , соответствующую управлению $\hat{u}(\cdot)$ и начинающуюся в точке x_0 в момент времени t_0 . Другими словами, $\hat{x}(t) = \varphi(t; t_0, x_0, \hat{u}(\cdot))$. Пусть $|\varepsilon| > 0$ таково, что сфера $S(\hat{u}(\cdot), |\varepsilon|) \subset \Omega$, и пусть $h(\cdot) \in S(0(\cdot), 1)$, так что $\hat{u}(\cdot) + \varepsilon h(\cdot) \in \Omega$. Обозначив через $x_h(\cdot)$ траекторию системы Σ , соответствующую управлению $\hat{u}(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)$, мы заметим, что

$$(1.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_h(t) - \hat{x}(t)\| = 0$$

равномерно по t , поскольку переходная функция системы Σ предполагается непрерывной по всем своим аргументам. Итак,

$$x_h(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_h(\tau), \hat{u}(\tau) + \varepsilon h(\tau), \tau) d\tau,$$

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau,$$

так что

$$(1.2) \quad x_h(t) - \hat{x}(t) = \int_{t_0}^t [f(x_h(\tau), \hat{u}(\tau) + \varepsilon h(\tau), \tau) - f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau)] d\tau.$$

Если теперь предположить, что f непрерывно дифференцируема¹⁾ по x и u , то можно записать²⁾, что

$$\begin{aligned} f(x_h(\tau), \hat{u}(\tau) + \varepsilon h(\tau), \tau) - f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\wedge} [x_h(\tau) - \hat{x}(\tau)] + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\wedge} \varepsilon h(\tau) + o(\varepsilon, \tau), \end{aligned}$$

где $o(\varepsilon, \tau)$ более высокого порядка по ε , чем первый, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|o(\varepsilon, \tau)\|}{\varepsilon} = 0$$

равномерно по τ . Однако, согласно уравнению (1.2),

$$(1.3) \quad x_h(t) - \hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\wedge} [x_h(\tau) - \hat{x}(\tau)] + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\wedge} \varepsilon h(\tau) \right\} d\tau + \\ + \int_{t_0}^t o(\varepsilon, \tau) d\tau,$$

и, следовательно, в силу соотношения (1.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left\| \int_{t_0}^t o(\varepsilon, \tau) d\tau \right\|}{\varepsilon} = 0$$

равномерно по t . Более того, опираясь на соотношение (1.1), можно утверждать, что

$$(1.4) \quad x_h(t) - \hat{x}(t) = \varepsilon \psi(t) + o(\varepsilon, t),$$

¹⁾ На самом деле достаточно простоты производных.

²⁾ Чертой с нижним индексом \wedge помечены величины, вычисляемые вдоль траектории $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)$. Напомним также, что $\partial f / \partial x \in \mathcal{L}(X, X)$, а $\partial f / \partial u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_U, X)$.

где $o(\varepsilon, t)$ имеет более высокий порядок, чем ε , и равномерно по t . (Внимание! Обозначения $o(\varepsilon)$, $o(\varepsilon, t)$ и т. п. используются лишь для того, чтобы указать порядок соответствующих членов, и поэтому, например, нельзя предполагать, что $o(\varepsilon, t)$ из уравнения (1.4) и $o(\varepsilon, \tau)$ из уравнения (1.3) одинаковы.) Из (1.4) имеем

$$\varepsilon \psi(t) + o(\varepsilon, t) = \varepsilon \int_{t_0}^t \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\Lambda} \psi(\tau) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\Lambda} h(\tau) \right] d\tau + \int_{t_0}^t o(\varepsilon, \tau) d\tau.$$

Отсюда после деления на ε и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получим, что

$$(1.5) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\Lambda} \psi(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\Lambda} h(t), \quad \psi(t_0) = 0.$$

Линейное уравнение (1.5) называется *уравнением возмущенного движения* относительно эталонной траектории $\hat{x}(\cdot)$. Для удобства мы часто будем писать вместо уравнения (1.4), что

$$x_h(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + \varepsilon \psi(\cdot) + o(\varepsilon),$$

и обычно будем опускать подробные исследования возможности тех или иных манипуляций с $o(\varepsilon)$.

Вернемся к задаче управления. Предположим на время, что целевое множество для этой задачи имеет вид $\{t_1\} \times X$, где t_1 фиксировано. В связи с этим мы будем предполагать, что функционал качества конечного состояния зависит только от x . Кроме того, мы потребуем, чтобы K была непрерывно дифференцируемой, а L непрерывно дифференцируемой¹⁾ по x и u . В этом случае непрерывно дифференцируем по x и u и гамильтониан системы. В частности, поскольку

$$H(x, \lambda, u, t) = L(x, u, t) + \langle \lambda, f(x, u, t) \rangle$$

(напомним, что согласно обозначениям, введенным в гл. 3, $\langle \lambda, f(x, u, t) \rangle$ обозначает действие $\lambda \in X^*$ на $f(x, u, t)$, а не скалярное произведение), мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^* \lambda,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^* \lambda.$$

Если же рассматривать X как часть X^{**} , то получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t).$$

¹⁾ Здесь также достаточно считать производные простыми, так как все выкладки можно выполнить в интегральной форме.

Заметим, что так как норма сопряженного преобразования для ограниченного линейного преобразования совпадает с нормой самого преобразования (Данфорд, Шварц [1958]), отображения

$$(x, u, t) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^* (x, u, t),$$

$$(x, u, t) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^* (x, u, t)$$

будут непрерывными (или простыми).

(1.6) **Лемма.** Пусть $\hat{u}(\cdot)$ принадлежит Ω , а $\hat{u}(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)$ описывает возмущение $\hat{u}(\cdot)$. Тогда

$$J(t_0, x_0, \hat{u} + \varepsilon h) - J(t_0, x_0, \hat{u}) = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{\Lambda}, h(\tau) \right\rangle d\tau + o(\varepsilon).$$

Доказательство. Так как K дифференцируема, а $\partial H / \partial x$ непрерывна, линейное дифференциальное уравнение

$$(1.7) \quad \dot{\lambda}(t) = \left(- \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \right)^* \lambda(t) - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{\Lambda}$$

имеет единственное решение $\hat{\lambda}(t)$, удовлетворяющее граничному условию

$$(1.8) \quad \hat{\lambda}(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x}(\hat{x}(t_1)).$$

Назовем $\hat{\lambda}(\cdot)$ котраекторией¹⁾, соответствующей $\hat{x}(\cdot)$ и $\hat{u}(\cdot)$. Но так как и $x_h(\cdot)$, и $\hat{x}(\cdot)$ являются траекториями нашей системы, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\langle \hat{\lambda}(\tau), f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) \rangle - \left\langle \hat{\lambda}(\tau), \frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} \right\rangle \right] d\tau = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\langle \hat{\lambda}(\tau), f(x_h(\tau), \hat{u}(\tau) + \varepsilon h(\tau), \tau) \rangle - \left\langle \hat{\lambda}(\tau), \frac{dx_h(\tau)}{d\tau} \right\rangle \right] d\tau = 0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} J(t_0, x_0, \hat{u} + \varepsilon h) &= K(x_h(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} H(x_h(t), \hat{\lambda}(t), \hat{u}(t) + \varepsilon h(t), t) dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{\lambda}(t), \dot{x}_h(t) \rangle dt, \\ J(t_0, x_0, \hat{u}) &= K(\hat{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} H(\hat{x}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{u}(t), t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{\lambda}(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

¹⁾ Доводы в пользу такой терминологии приводятся ниже.

Воспользуемся теперь интегрированием по частям (Данфорд, Шварц [1958]):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{\lambda}(t), \dot{x}_h(t) \rangle dt &= \langle \hat{\lambda}(t_1), x_h(t_1) \rangle - \langle \hat{\lambda}(t_0), x_h(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\hat{\lambda}}(t), x_h(t) \rangle dt, \\ \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{\lambda}(t), \dot{x}(t) \rangle dt &= \langle \hat{\lambda}(t_1), x(t_1) \rangle - \langle \hat{\lambda}(t_0), x(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\hat{\lambda}}(t), x(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Используя эти уравнения, а также уравнение возмущенного движения и свойство непрерывной дифференцируемости K и H , легко показать, что

$$\begin{aligned} J(t_0, x_0, \hat{u} + \varepsilon h) - J(t_0, x_0, \hat{u}) &= \\ &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial K}{\partial x}(\hat{x}(t_1)), \psi(t_1) \right\rangle + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{\Lambda}, h(t) \right\rangle dt - \\ &- \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{\Lambda}, \psi(t) \right\rangle dt - \varepsilon \langle \hat{\lambda}(t_1), \psi(t_1) \rangle - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\hat{\lambda}}(t), \psi(t) \rangle dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

А так как $\hat{\lambda}(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям (1.7) и (1.8), это и доказывает лемму.

(1.9) Следствие. Если $u^0(\cdot)$ является оптимальным управлением, то

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_0, h(t) \right\rangle dt = 0$$

при всех $h(\cdot) \in S(0(\cdot), 1)$ (и тем более при всех ограниченных $h(\cdot)$).

Доказательство. Если управление $u^0(\cdot)$ оптимально, то

$$J(t_0, x_0, u^0 + \varepsilon h) - J(t_0, x_0, u^0) = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_0, h(t) \right\rangle dt + o(\varepsilon) \geq 0.$$

Поскольку ε может быть как положительным, так и отрицательным, членом $o(\varepsilon)$ можно пренебречь, что и доказывает следствие.

При доказательстве леммы (1.6) нам пришлось ввести новый термин — «котраекторию». По сути дела он описывает решение дифференциального уравнения в X^* , являющегося «сопряженным» относительно уравнения возмущенного движения (1.5). Определим это новое понятие более строго.

(1.10) **Определение.** Если $\dot{u}(\cdot)$ принадлежит Ω , а $\dot{x}(\cdot)$ является траекторией системы Σ , соответствующей управлению $\dot{u}(\cdot)$, то решение дифференциального уравнения (в X^*)

$$\dot{\lambda} = \left(- \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \right)^* \lambda - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{\Lambda}$$

называется *котраекторией* (или *сопряженной траекторией*), соответствующей $\dot{x}(\cdot)$ и $\dot{u}(\cdot)$.

В согласии с этой терминологией мы будем часто называть элементы X^* «косостояниями» системы, а аргумент λ гамильтониана $H(x, \lambda, u, t)$ — сопряженной переменной.

Докажем теперь важную лемму.

(1.11) **Лемма.** Пусть V — некоторое банахово пространство, а $v(\cdot)$ — некоторая простая функция из $[t_0, t_1]$ в V^* , такая, что

(а) v непрерывна справа (т. е. $v(t+) = v(t)$),

(б) $\int_{t_0}^{t_1} \langle v(t), k(t) \rangle dt = 0$ для всех простых отображений

$k(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow V$.

Тогда $v(\cdot) = 0$ на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Пусть τ принадлежит $[t_0, t_1]$, и пусть $v(\tau) \neq 0$. Тогда найдется такой элемент k множества v , что

$$\langle v(\tau), k \rangle > \delta > 0$$

для некоторого δ . Отображение $\varphi(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенное согласно уравнению

$$\varphi(t) = \langle v(t), k \rangle,$$

является простым и непрерывным справа. Но отсюда заключаем, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\varphi(t) \geq \delta > 0 \text{ при } t \text{ из } [\tau, \tau + \varepsilon).$$

Пусть теперь

$$k(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\tau, \tau + \varepsilon), \\ k, & t \in [\tau, \tau + \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда $k(\cdot)$ простое и

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle v(t), k(t) \rangle dt = \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon} \langle v(t), k \rangle dt \geq \varepsilon \delta > 0.$$

Но это противоречит условию (б), и, следовательно, $v(\tau) = 0$ при любых τ из $[t_0, t_1]$, что и доказывает утверждение леммы.

Эта лемма вместе со следствием (1.9) приводит к следующей теореме.

(1.12) **Теорема.** *Предположим, что пространство \mathcal{H}_U рефлексивно (в частности, что пространство \mathcal{H}_U гильбертово) и что управление $u^0(\cdot)$ является оптимальным. Тогда*

- (а) *существует косоостояние $\lambda^0(\cdot)$, соответствующее $x^0(\cdot)$ и $u^0(\cdot)$;*
- (б) *уравнение $\frac{\partial H}{\partial u}(x^0(\cdot), \lambda^0(\cdot), u^0(\cdot), \cdot) = 0$ выполняется почти всюду на $[t_0, t_1]$.*

Таким образом, необходимое условие оптимальности управления состоит в том, чтобы у гамильтониана имелся экстремум, причем и в том случае, когда его вычисляют вдоль оптимальной траектории системы и соответствующим образом подобранной котраектории системы.

Предположим теперь, что целевое множество задачи имеет вид $\{t_1\} \times \{x_1\}$, где t_1 и x_1 фиксированы, и что $K = 0$, т. е. функционал качества конечного состояния нулевой. Тогда можно попытаться найти непрерывно дифференцируемую функцию $\hat{K}(x)$, обладающую тем свойством, что задача с целевым множеством $\{t_1\} \times X$ и функционалом качества конечного состояния \hat{K} была бы эквивалентной исходной в том смысле, что управление одной из них оказывается оптимальным тогда и только тогда, когда оно оптимально и для другой. Если такое \hat{K} существует, то можно воспользоваться последней теоремой. Другой подход опирается на попытку показать, что в подходящей окрестности оптимального управления $u^0(\cdot)$ найдется «достаточно» возмущений для того, чтобы действительно обеспечить минимизацию гамильтониана как функции u . Именно этот последний подход и был использован Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко [1961] в их доказательстве принципа максимума. Некоторые из возникающих при этом вопросов станут яснее в следующем параграфе.

Здесь же отметим, что если целевое множество S произвольно, а $u^0(\cdot)$ есть оптимальное управление, преобразующее (t_0, x_0) в S с моментом первого достижения t_1 , то управление $u^0(\cdot)$ является оптимальным и для задачи с целевым множеством $\{t_1\} \times \{x^0(t_1)\}$ и нулевым функционалом качества конечного состояния, так что требуемые необходимые условия оптимальности для общего случая можно получить и при таком подходе. Интересные общие результаты были недавно получены Гамкрелидзе [1965], Нейштадтом [1965, 1966, 1967], Халкином [1967] и Кеноном, Каллумом и Полаком [1967] (см. также приложение А).

4.2 Принцип максимума Понтрягина

Сосредоточим теперь наше внимание на необходимых условиях оптимальности решения задачи управления конечномерных динамических систем. Относительно рассматриваемых в этом параграфе систем Σ будем предполагать следующее.

1. Область определения (T_1, T_2) представляет собой всю вещественную ось \mathbf{R} .

2. Пространство состояний X системы Σ совпадает с \mathbf{R}_n .

3. Пространство значений входных воздействий U является некоторым подмножеством \mathbf{R}_m , причем $m \leq n$.

4. Пространство управляющих воздействий Ω образовано множеством всевозможных простых функций из \mathbf{R} в U .

5. Уравнение системы Σ имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

(т. е. система автономна), где

$$f_i(x, u), \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u) \in C(\mathbf{R}_n \times \bar{U})^1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

если обозначить компоненты векторов f и x через f_1, \dots, f_n и x_1, \dots, x_n соответственно.

Кроме того, станем предполагать, что показатель качества траектории L имеет вид $L(x, u)$ (т. е. не зависит от t) и что

$$L(x, u), \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, u) \in C(\mathbf{R}_n \times \bar{U}).$$

Заметим, что при этом не делается никаких предположений о дифференцируемости f_i и L по u .

Будем рассматривать лишь две следующие задачи управления, которые в дальнейшем называются задачей 1 и задачей 2.

Задача 1. Показатель качества конечного состояния не назначается (т. е. $K \equiv 0$), а целевое множество S имеет вид $\mathbf{R} \times \{x_1\}$, где x_1 фиксировано.

Задача 2. Показатель качества конечного состояния не назначается ($K \equiv 0$), а целевое множество S имеет вид $\mathbf{R} \times \bar{S}$, где \bar{S} — либо некоторое гладкое k -мерное многообразие²⁾ из \mathbf{R}_n , либо все \mathbf{R}_n .

Хотя все эти ограничения с первого взгляда и кажутся сильными, с помощью подходящей замены переменных многие интересные задачи удается свести к рассматриваемым здесь случаям. Например, пусть нам нужно решить нестационарную задачу, т. е. производящая функция нашей системы имеет вид $f(x, u, t)$, а L также зависит от t , $L = L(x, u, t)$. Тогда можно ввести новую переменную состояния x_{n+1} , изменение которой описывается уравне-

¹⁾ Через $C(\mathbf{R}_n \times \bar{U})$ обозначается множество всевозможных непрерывных вещественных функций, определенных в $\mathbf{R}_n \times \bar{U}$, где \bar{U} есть замыкание U .

²⁾ Гладким k -мерным многообразием \mathbf{R}_n называется такое подмножество $G \subset \mathbf{R}_n$, что $G = \{x: g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n-k\}$, где $g_i(y)$ и $(\partial g_i / \partial x_j)(x)$ непрерывны, а градиенты $\nabla_x g_i(x)$ линейно независимы, если $y \in G$ при $i = 1, \dots, n-k$ и $j = 1, \dots, n$.

нием $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$, и рассматривать систему в \mathbf{R}_{n+1} с производящей функцией $g(x, x_{n+1}, u)$ вида $g_i(x, x_{n+1}, u) = f_i(x, u, x_{n+1})$, $i = 1, \dots, n$, а $g_{n+1}(x, x_{n+1}, u) = 1$, и показатель качества траектории

$$M(x, x_{n+1}, u) = L(x, u, x_{n+1}).$$

(Дополнительные сведения относительно такой замены переменных можно найти в книгах Атанса и Фалба [1966] и Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе и Мищенко [1961]. Отметим также, что сформулированные выше задачи отличаются лишь характером целевых множеств.)

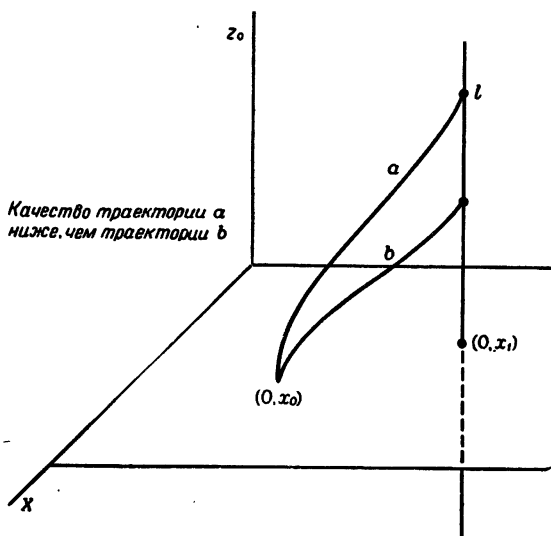


Рис. 4.1.

Прежде чем предлагать строгую формулировку принципа Понтрягина, попытаемся найти для задачи 1 интуитивно понятную геометрическую интерпретацию. Полагая $Z = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n+1}$ и обозначая координаты типичного z из Z через z_0, \dots, z_n , мы сможем рассматривать систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= L(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ \dot{z}_i(t) &= f_i(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)). \end{aligned}$$

Если теперь положить $\hat{z} = (0, x_0)$ (т. е. $\hat{z}_0 = 0$ и $\hat{z}_i = x_{0,i}$ для $i = 1, \dots, n$), то задачу 1 можно сформулировать в следующем виде: определить управление $u(\cdot)$ из Ω , преобразующее (t_0, \hat{z}) в $t_1 \times l$, где l — прямая $z_i = x_{1,i}$, $i = 1, \dots, n$, таким образом, чтобы координата z_0 была минимальной (рис. 4.1). Аналогичная геометрическая интерпретация возможна и для задачи 2, но в этом

случае прямую l нужно заменить множеством $\{z: (z_1, \dots, z_n) \in S\}$. Таким образом, сформулированные выше задачи управления можно рассматривать как задачи для другой системы Σ_1 (описываемой уравнениями (2.1)), для которой все траектории безразличны ($L = 0$), а показатель качества конечного состояния имеет простой вид $K(z) = z_0$. Как мы увидим ниже, такая точка зрения оказывается очень плодотворной.

Подведем теперь промежуточный итог.

(2.2) Лемма. Пусть Σ_1 есть динамическая система с областью определения R , пространством состояний R_{n+1} , пространством управляющих воздействий Ω и уравнениями динамики (2.1). Пусть (t_0, \hat{z}) принадлежит пространству событий системы Σ_1 , $\hat{z} = (0, x_0)$, и пусть $S_1 \subset R \times R_{n+1}$ имеет вид $R \times R \times \hat{S}$, где \hat{S} равно либо $\{x_1\}$, либо S . Пусть $K_1(z) = z_0$ при любых z из R_{n+1} , и пусть $L_1 = 0$. Обозначим через P_1 соответствующую задачу управления для системы Σ_1 . Тогда управление $u^0(\cdot)$ оптимально для P_1 относительно (t_0, \hat{z}) тогда и только тогда, когда $u^0(\cdot)$ оптимально для P относительно (t_0, x_0) (где через P обозначена соответствующая задача управления для Σ).

Доказательство этой леммы предоставляем читателю. Гамильтониан задачи P_1 имеет следующий вид¹⁾:

$$H_1(z, \lambda, u) = \lambda_0 L(x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x, u),$$

где $z = (z_0, x)$. Функционал $H_1(z, \lambda, u)$ будем называть гамильтонианом исходной задачи. Полагая $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и замечая, что $H_1(z, \lambda, u)$ не зависит от z_0 , мы будем часто заменять $H_1(z, \lambda, u)$ на

$$H(x, p, u, \lambda_0) = \lambda_0 L(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle,$$

и, сознательно допуская определенную некорректность, называть H гамильтонианом исходной задачи.

(2.3) Определение. Система $2n$ -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.4) \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u, \lambda_0) = f(x, u),$$

$$(2.5) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u, \lambda_0) = -\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial x}(x, u) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*(x, u) p$$

называется канонической (или гамильтоновой) системой. Если $u(\cdot) \in \Omega$ и $x_u(\cdot)$ есть соответствующее решение уравнения (2.5), то любое решение уравнения (2.5) называется соответствующим $u(\cdot)$ и λ_0 (можно сравнить с определением (1.10)).

¹⁾ Заметим, что, поскольку $R_{n+1}^* = R_{n+1}$, можно считать, что $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ принадлежит R_{n+1} .

Отметим, что уравнение (2.4) как исходное уравнение системы не зависит от p и λ_0 и что уравнение (2.5) линейно относительно p .

(2.6) **Теорема (принцип Понтрягина для задачи 1).** Если $u^0(\cdot) \in \Omega$ есть оптимальное управление для задачи 1, то найдутся такие неотрицательная постоянная λ_0^0 ($\lambda_0^0 \geq 0$) и функция $p^0(\cdot)$, что

(а) $p^0(\cdot)$ соответствует $u^0(\cdot)$ и λ_0^0 ;

(б) для $H(x^0(t), p^0(t), u, \lambda_0^0)$ существует абсолютный минимум по u из U , достигаемый в точке $u = u^0(t)$ для t из $[t_0, t_1]^1$, где t_1 есть момент первого достижения, соответствующий $u^0(\cdot)$;

(с) при $t \in [t_0, t_1]$ имеем $\dot{H}(x^0(t), p^0(t), u^0(t), \lambda_0^0) = 0$.

(2.7) **Теорема (принцип Понтрягина для задачи 2).** Если управление $u^0(\cdot)$ оптимально для задачи 2, то найдутся такие неотрицательная постоянная $\lambda_0^0 \geq 0$ и функция $p^0(\cdot)$, что

(а) $p^0(\cdot)$ соответствует $u^0(\cdot)$ и λ_0^0 ;

(б) для $H(x^0(t), p^0(t), u, \lambda_0^0)$ существует абсолютный минимум по u из U , достигаемый в точке $u = u^0(t)$ для t из $[t_0, t_1]$, где t_1 есть момент первого достижения, соответствующий $u^0(\cdot)$;

(с) при $t \in [t_0, t_1]$ имеем $H(x^0(t), p^0(t), u^0(t), \lambda_0^0) = 0$;

(д) $p^0(t_1) = 0$, если $\tilde{S} = R_n$ и $p^0(t_1)$ ортогонально²⁾ \tilde{S} в точке $x^0(t_1)$, если \tilde{S} есть некоторое гладкое k -мерное многообразие из R_n .

Приведем теперь эвристическое доказательство теоремы (2.6). Исчерпывающее доказательство можно найти у Халкина [1963а] или Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе и Мищенко [1961].

«Доказательство» теоремы (2.6). Для простоты изложения мы станем рассматривать задачу P_1 в R_{n+1} . Таким образом, станем рассматривать систему

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= L(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) = g_0(z(t), u(t)), \\ \dot{z}_i(t) &= f_i(z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) = g_i(z(t), u(t)), \end{aligned}$$

которая часто записывается в виде

$$\dot{z}(t) = g(z(t), u(t)).$$

Предположим, что управление $u^0(\cdot)$ оптимально относительно (t_0, \hat{z}) , где $\hat{z} = (0, x_0)$, и что t_1 есть момент первого достижения, соответствующий управлению $u^0(\cdot)$. Кроме того, предположим, что $u^0(\cdot)$ непрерывно слева (т. е. что $u^0(t-) = u^0(t)$)³⁾.

¹⁾ Это нужно понимать как утверждение о почти всех точках этого промежутка.

²⁾ Вместо этого часто говорят, что $p^0(t_1)$ «трансверсально» \tilde{S} .

³⁾ Это не приведет к потере общности, поскольку каждое допустимое управление почти всюду эквивалентно некоторому непрерывному слева.

Построим теперь подходящее множество π возмущений управления $u^0(\cdot)$. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть a и b принадлежат \mathbb{R} , причем $b \geq 0$. Если $\tau \in (t_0, t_1]$ и $\omega \in U$, то управление $u(\cdot; a, b, \tau, \omega)$, определяемое соотношениями

$$u(t; a, b, \tau, \omega) = \begin{cases} \omega, & t \in (\tau - \varepsilon b, \tau], \\ u^0(t), & t \notin (\tau - \varepsilon b, \tau], t \in [t, t_1 + \varepsilon a], a \leq 0, \\ u^0(t), & t \notin (\tau - \varepsilon b, \tau], t \in [t, t_1], a > 0, \\ u^0(t_1), & t \in [t_1, t_1 + \varepsilon a], a > 0, \end{cases}$$

называется *фундаментальным возмущением* управления $u^0(\cdot)$. Если $a = 0$, то это возмущение называется *пространственным*, а если $b = 0$, то — *временным* (см. Атанс, Фалб [1966]). Заметим, что фундаментальное возмущение обладает тем свойством, что соответствующее решение $z(\cdot; a, b, \tau, \omega)$ уравнения (2.8), вычисленное в точке $(t_1 + \varepsilon a)$, удовлетворяет соотношению

$$z(t_1 + \varepsilon a; a, b, \tau, \omega) = z^0(t_1) + \varepsilon \xi[a; b, \tau, \omega] + o(\varepsilon),$$

где $\xi[a; b, \tau, \omega]$ не зависит от ε .

Теперь если Ψ представляет собой некоторое множество возмущений $u(\cdot; \alpha)$ управления $u^0(\cdot)$, зависящих от параметра α , то мы будем говорить, что Ψ *полно*, если

$$z(t_1 + \varepsilon \alpha; \alpha) = z^0(t_1) + \varepsilon \xi[\alpha] + o(\varepsilon),$$

и если в Ψ найдется возмущение, соответствующее $\xi[c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2]$ для $c_1, c_2 \geq 0$, здесь $\xi[\alpha]$ не зависит от ε . Обозначим через π полное множество возмущений (с параметром a), содержащих все фундаментальные возмущения. Множество векторов ξ , соответствующих элементам π , образует выпуклый конус C , который можно считать поставленным в соответствие $z^0(t_1)$. Более того, каждый элемент C порождается некоторым элементом π . (Эти два последних утверждения, принимаемых здесь на веру, и составляют основу строгого доказательства.)

Если $\xi = (-1, 0, \dots, 0)$, то можно утверждать, что ξ не принадлежит внутренности конуса C . Действительно, если бы ξ принадлежало внутренности конуса C , то, полагая $\tilde{u}(\cdot)$ равным тому элементу π , который соответствует ξ , мы получили бы, что

$$(2.9) \quad \tilde{z}_0 = z_0^0(t_1) - \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \tilde{z}_i = x_{1,i} + o(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n,$$

где через \tilde{z} обозначена точка из \mathbb{R}_{n+1} , в которую $\tilde{u}(\cdot)$ преобразует \hat{z} . «Уточняя» соотношения (2.9), мы сможем найти такое возмущение $u^\#(\cdot)$, что $z_0^\# < z_0^0(t_1)$, $z_i^\# = x_{1,i}$, $i = 1, \dots, n$, а это противоречит оптимальности управления $u^0(\cdot)$ (процесс «уточнения» соотноше-

ний (2.9) составляет другое тонкое, но принципиально важное место строгого доказательства).

Поскольку ξ не принадлежит внутренности конуса C , найдется некоторая гиперплоскость Λ с нормалью $\lambda^0 = (\lambda_0^0, \lambda_1^0(t_1), \dots, \lambda_n^0(t_1))$, разделяющая ξ и C . Другими словами, найдется такое λ^0 , что для всех ξ из C имеет место $\langle \lambda^0, \xi \rangle \leq 0$, $\langle \lambda^0, \xi \rangle \geq 0$. Ясно, что $\lambda_0^0 \geq 0$. Обозначим через $p^0(\cdot)$ решение уравнения (2.5), соответствующее $u^0(\cdot)$ и λ_0^0 и обладающее тем свойством, что $p^0(t_1) = (\lambda_1^0(t_1), \dots, \lambda_n^0(t_1))$. А так как уравнение (2.5) линейно, то такое $p^0(\cdot)$ вполне определено.

Предположим затем, что $u(\cdot; 0, b, \tau, \omega)$ является пространственным возмущением управления $u^0(\cdot)$. Тогда

$$z(\tau; 0, b, \tau, \omega) = z^0(\tau) + \varepsilon [g(z^0(\tau), \omega) - g(z^0(\tau), u^0(\tau))] + o(\varepsilon).$$

Если обозначить через $\xi(t)$ решение уравнения возмущенного движения (т. е. уравнения $\dot{\xi} = \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_0 \xi$) относительно оптимальной траектории, удовлетворяющего условиям

$$\xi(\tau) = g(z^0(\tau), \omega) - g(z^0(\tau), u^0(\tau)),$$

то

$$z(t_1; 0, b, \tau, \omega) = z^0(t_1) + \varepsilon \xi(t_1) + o(\varepsilon).$$

А так как $\xi(t_1)$, равное $\xi[0; b, \tau, \omega]$, принадлежит C , имеем

$$\langle \lambda_0^0, \xi(t_1) \rangle \geq 0.$$

Однако уравнение для $\xi(t)$ является сопряженным¹⁾ относительно уравнения для $(\lambda_0^0, p^0(t))$, и, следовательно,

$$\langle (\lambda_0^0, p^0(\tau)), \xi(\tau) \rangle \geq 0,$$

или

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 g_0(z^0(\tau), \omega) + \sum_1^n p_i^0(\tau) g_i(z^0(\tau), \omega) &\geq \\ &\geq \lambda_0^0 g_0(z^0(\tau), u^0(\tau)) + \sum_1^n p_i^0(\tau) g_i(z^0(\tau), u^0(\tau)). \end{aligned}$$

Таким образом, нам удалось установить справедливость утверждений (а) и (б) теоремы (2.6).

¹⁾ Это означает, что, полагая $\lambda^0(t) = (\lambda_0^0, p^0(t))$, мы получаем уравнение $\dot{\lambda}^0 = - \left(\frac{\partial g}{\partial z} \Big|_0 \right)^* \lambda^0$, где $\dot{\xi} = \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_0 \xi$.

Что же касается утверждения (с), то в том случае, когда $u(\cdot; a, 0, \tau, \omega)$ является временным возмущением управления $u^0(\cdot)$, имеем

$$\xi[a; 0, \tau, \omega] = ag(z^0(t_1), u^0(t_1)) \in C,$$

так что

$$a \langle \lambda^0, g(z^0(t_1), u^0(t_1)) \rangle \geq 0.$$

Но a может быть любым элементом из R , и, следовательно, утверждение (с) выполняется в точке t_1 . Предположим теперь, что $H^0(t)$ определяется соотношением

$$H^0(t) = \langle (\lambda_0^0, p^0(t)), g(z^0(t), u^0(t)) \rangle.$$

Если $(t_2, t_3) \subset [t_0, t_1]$ и $u^0(t)$ непрерывно на $(t_2, t_3]$, то в силу условия (b) мы имеем

$$\begin{aligned} \langle (\lambda_0^0, p^0(\tau)), g(z^0(\tau), u^0(\sigma)) \rangle - H^0(\sigma) &\geq H^0(\tau) - H^0(\sigma) \geq \\ &\geq H^0(\tau) - \langle (\lambda_0^0, p^0(\sigma)), g(z^0(\sigma), u^0(\tau)) \rangle, \quad \sigma, \tau \in (t_2, t_3]. \end{aligned}$$

Однако функция

$$\langle (\lambda_0^0, p^0(t)), g(z^0(t), u^0(\sigma)) \rangle = \varphi(t)$$

дифференцируема на $(t_2, t_3]$ и $\dot{\varphi}(t) = 0$. Отсюда находим

$$H^0(\tau) = H^0(\sigma),$$

и, следовательно, $H^0(\cdot)$ постоянно на $(t_2, t_3]$. С другой стороны, если t_4 есть точка разрыва для $u^0(\cdot)$ и если $\tau = t_4 + \delta$, где δ достаточно мало, то из соотношения $H^0(\tau) > H^0(t_4)$ следовало бы, что

$$\langle (\lambda_0^0, p^0(t_4)), g(z^0(t_4), u^0(\tau)) \rangle < H^0(t_4)$$

(что противоречит утверждению (b)), а из соотношения $H^0(\tau) < H^0(t_4)$ получилось бы, что

$$\langle (\lambda_0^0, p^0(\tau)), g(z^0(\tau), u^0(t_4)) \rangle < H^0(\tau)$$

(а это вновь противоречит (b)). Таким образом,

$$H^0(t_4) = H^0(t_4 +),$$

и, следовательно, $H^0(t) = H^0(t_1) = 0$ при всех t из $[t_0, t_1]$. Тем самым мы доказали утверждение (с). На этом наше эвристическое доказательство теоремы (2.6) заканчивается (мы еще раз подчеркиваем, что его нельзя считать (строгим) доказательством).

В завершение этого параграфа сделаем несколько замечаний относительно принципа Понтрягина. В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые обобщения этого принципа, а в следующей

главе обсудим, как его можно использовать для проектирования систем управления.

(2.10) **Замечание.** Теорема (2.6) по сути дела формулирует необходимые условия локальной оптимальности, аналогичные условиям обращения в нуль производных в обычных задачах на экстремум.

(2.11) **Замечание.** У канонической системы решения существуют вдоль *любой* траектории, а не только вдоль оптимальных или экстремальных.

(2.12) **Замечание.** Легко видеть, что минимизацию гамильтониана (теорема 2.6b)) можно рассматривать как сведение задачи минимизации функционала к обычной задаче минимизации. Практическая важность этого шага очевидна.

(2.13) **Замечание.** Выводы теоремы (2.6) не зависят от вида целевого множества S , и единственное различие между теоремами (2.6) и (2.7) проявляется в условиях трансверсальности (d) из теоремы (2.7). Это условие можно рассматривать как дополнительное, необходимое для того, чтобы обеспечить единственность решения канонической системы. Этому вопросу мы еще раз коснемся в следующей главе.

(2.14) **Замечание.** Предположим, что наша задача не вырождена в том смысле, что для нее $\lambda_0^0 \neq 0$. Тогда без какой-либо потери общности из-за линейности по $p^0(\cdot)$ так называемого уравнения косодействия (2.5) можно сразу положить, что $\lambda_0^0 = 1$. Все задачи синтеза, рассматриваемые ниже, не вырождены, и мы будем без дальнейших оговорок полагать в них, что $\lambda_0^0 = 1$.

(2.15) **Замечание.** Если вместо функции H рассматривать функцию $\tilde{H}(x, p, u, \lambda_0)$, где

$$\tilde{H}(x, p, u, \lambda_0) = \lambda_0 L(x, u) - \langle p, f(x, u) \rangle,$$

то единственное изменение в результатах состояло бы в замене слова «минимум» на «максимум» в утверждении (b) теоремы (2.6). Понтрягин рассматривал именно \tilde{H} и пришел к своему принципу максимума, в то время как наш результат правильнее было бы называть принципом минимума.

4.3 Теорема существования

Рассмотрим теперь вопрос о существовании оптимального управления. Начнем с обсуждения понятия достижимости, а затем покажем, как это понятие связано с вопросом о существовании оптимального управления. Предположим вновь, что речь идет о гладкой

динамической системе Σ и что Ω представляет собой множество управляющих воздействий для Σ .

(3.1) **Определение.** Пусть (t_0, x_0) есть некоторый заданный элемент пространства событий $(T_1, T_2) \times X$. Тогда событие (t_1, x_1) , где $t_1 \geq t_0$, называется *достижимым* из (t_0, x_0) относительно Ω , если найдется такое $u(\cdot) \in \Omega$, что

$$x_1 = \varphi(t_1; t_0, x_0, u(\cdot)).$$

Множество $A(t_0, x_0, \Omega) = \{(t_1, x_1): (t_1, x_1) \text{ достижимо из } (t_0, x_0) \text{ относительно } \Omega\}$ называется *множеством достижимости* относительно t_0, x_0 и Ω . Сечение¹⁾ множества $A(t_0, x_0, \Omega)$ в точке t_1 , обозначаемое через $A(t_1; t_0, x_0, \Omega)$, называется *множеством достижимости в точке t_1 относительно t_0, x_0 и Ω* .

Легко видеть, что если рассматривать задачу управления с целевым множеством S и множеством допустимых управлений Γ , то условие $S \cap A(t_0, x_0, \Gamma) \neq \emptyset$ является необходимым для существования оптимального управления относительно (t_0, x_0) и Γ . Без какой-либо потери общности можно предположить, что критерий качества определяется лишь показателем качества конечного состояния $K(t, x)$ ²⁾. Тогда легко прийти к следующей теореме.

(3.2) **Теорема.** *Предположим, что $S \cap A(t_0, x_0, \Gamma) \neq \emptyset$ и что существует такая топология (не обязательно индуцируемая тихоновской топологией $(T_1, T_2) \times X$), что $S \cap A(t_0, x_0, \Gamma)$ компактно, а функция $K(t, x)$ полунепрерывна снизу³⁾. Тогда оптимальное управление относительно (t_0, x_0) и Γ существует.*

Эта теорема сразу получается из того факта, что у полунепрерывных снизу вещественных функций, определенных на компактном множестве, существует минимум (Роте [1948]).

Но так как показатели качества для большинства задач управления являются достаточно гладкими (т. е. по крайней мере полунепрерывными снизу), естественно сосредоточить внимание на свойствах пересечения $S \cap A(t_0, x_0, \Omega)$ и множества $A(t_0, x_0, \Omega)$. Различные полезные результаты, особенно касающиеся замыкания $A(t_0, x_0, \Omega)$ и $A(t; t_0, x_0, \Omega)$, можно найти в работах Фалба [1964], Халкина [1963b] и Роксина [1962]. Два из этих результатов можно использовать для того, чтобы установить существование оптимального управления для примера из § 5.1.

¹⁾ Если $A \cap (T_1, T_2) \times X$ и π есть проектор $(T_1, T_2) \times X$ на (T_1, T_2) , то $\pi^{-1}(t_1) \cap A = \{(t_1, x): (t_1, x) \in A\}$ называется *сечением A в точке t_1* .

²⁾ Если показатель качества траектории отличен от нуля, то нужно было бы добавить новую переменную, например \bar{x} , для которой $\dot{\bar{x}} = L(x(t), u(t), t)$.

³⁾ Напомним, что функция K называется *полунепрерывной снизу* в точке (\bar{t}, \bar{x}) , если для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|(t, x) - (\bar{t}, \bar{x})\| < \delta \Rightarrow K(t, x) \leq K(\bar{t}, \bar{x}) + \varepsilon$.

Пусть наше пространство состояния имеет вид $X = \mathbf{R} \times \hat{X}$, и предположим, что $x = (\psi, \hat{x})$. Пусть, далее, наше целевое множество S имеет вид $\{t_1\} \times \mathbf{R} \times \hat{S}$ (т. е. является «цилиндром» с образующей, «параллельной» оси ψ), и показатель качества имеет предельно простой вид $K(x) = \psi$. В этом случае мы придем к следующей довольно очевидной лемме.

(3.3) **Лемма.** Обозначим через $A(\psi; t_0, x_0, \Omega)$ сечение множества $A(t_1; t_0, x_0, \Omega)$, рассматриваемого как подмножество пространства X , в точке ψ . Предположим, что если $\hat{S}(\psi) = \hat{S} \cap A(\psi; t_0, x_0, \Omega)$, то существует такое ψ^0 , что $\hat{S}(\psi) = \emptyset$ для $\psi < \psi^0$ и $\hat{S}(\psi^0) \neq \emptyset$. Тогда оптимальное управление $u^0(\cdot)$ существует, и качество управления $u^0(\cdot)$ равно ψ^0 .

Доказательство. Поскольку $\hat{S}(\psi^0) \neq \emptyset$, найдется $u^0(\cdot)$, преобразующее (t_0, x_0) в S и такое, что его качество равно ψ^0 . Но с другой стороны, если $u^1(\cdot)$ преобразует (t_0, x_0) в S и его качество равно ψ^1 , то $\hat{S}(\psi^1) \neq \emptyset$, и, следовательно, $\psi^1 \geq \psi^0$. Из этой леммы сразу получается следующая теорема.

(3.4) **Теорема.** Предположим, что

- (a) \hat{S} компактно;
- (b) $A(\psi; t_0, x_0, \Omega)$ замкнуто при любых ψ ;
- (c) $A(\psi; t_0, x_0, \Omega) = \bigcap_{\psi > \psi_1} A(\psi; t_0, x_0, \Omega)$ при любых ψ_1 ;
- (d) существует такое $\bar{\psi}$, что при любых $\psi < \bar{\psi}$ имеем $\hat{S}(\psi) = \emptyset$ (т. е. качество ограничено снизу);
- (e) существует управление, преобразующее (t_0, x_0) в S (и, следовательно, качество ограничено сверху).

Тогда оптимальное управление существует.

Доказательство. Обозначим $\inf \{\psi: \hat{S}(\psi) \neq \emptyset\}$ через ψ^0 . Существование ψ^0 гарантируется условиями (d) и (e). Мы утверждаем теперь, что $\hat{S}(\psi^0) \neq \emptyset$. Для того чтобы убедиться в этом, выберем некоторую монотонно убывающую последовательность ψ_i , $i = 1, 2, \dots$, сходящуюся к ψ^0 . В этом случае $\hat{S}(\psi_i) \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots$, и поэтому из каждого из таких множеств $\hat{S}(\psi_i)$ можно выбрать некоторый элемент \hat{x}_i , $i = 1, 2, \dots$. Но так как $\hat{x}_i \in \hat{S}$ для любых i , последовательность $\{\hat{x}_i\}$ содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся к \hat{x}^0 , принадлежащему \hat{S} . Однако условие (c) гарантирует, что $A(\psi, t_0, x_0, \Omega) \subset A(\psi'; t_0, x_0, \Omega)$ каждый раз, когда $\psi \leq \psi'$, и, следовательно, $\hat{x}_0 \in A(\psi; t_0, x_0, \Omega)$ при всех $\psi > \psi^0$. Но отсюда находим соотношение

$$\hat{x}^0 \in A(\psi^0; t_0, x_0, \Omega) = \bigcap_{\psi > \psi^0} A(\psi, t_0, x_0, \Omega),$$

которое в силу предыдущей леммы и доказывает утверждение теоремы.

Следующий типичный результат для конечномерных динамических систем принадлежит Роксину [1962].

(3.5) **Теорема.** Рассмотрим конечномерную динамическую систему с производящей функцией $f(x, u, t)$. Предположим, что

- (a) U компактно;
- (b) f интегрируема по t при каждом $(x, u) \in X \times U$;
- (c) f липшицева по x , т. е. найдется такая постоянная $C > 0$, что при любых $(t, u) \in \mathbb{R} \times U$ имеем

$$\|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| \leq C \|x_1 - x_2\|;$$

- (d) $f(x, U, t)$ выпукла при любых $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$;
 - (e) $\|f(x, u, t)\| \leq m(t)h(\|x\|)$, где $m(t)$ интегрируема, а $h(\cdot)$ ограничена и при $\|x\| \rightarrow \infty$ имеет такой же порядок, что и $\|x\|$.
- Тогда $A(t_0, x_0, \Omega)$ замкнуто.

Доказательство этой теоремы основано на свойстве слабой топологии в L_1 и может быть найдено в работе Роксина [1962].

Этой теоремой мы воспользуемся в § 5.1, чтобы показать существование оптимального управления для рассматриваемой там задачи. В общем случае важная задача существования оптимальных управлений оказывается весьма сложной, и наши теоремы дают лишь слабое представление о возникающих там трудностях.

4.4 Замечания о необходимых условиях оптимальности в задачах управления

Мы уже отмечали (§ 3.3), что задачи управления можно представлять себе как частный случай проблемы минимизации вещественного функционала, определенного на некотором подмножестве нормированного линейного пространства. Если же с этой общей точки зрения рассматривать необходимые условия оптимальности, упомянутые выше, то все они оказываются аналогичными в том смысле, что для всех них центральным является вопрос о существовании некоторого линейного функционала, порождающего соответствующее неравенство. Например, в принципе максимума приходится доказывать существование такого косостояния $(\lambda_0^0, p^0(\cdot))$, что при всех $u \in U$ имеет место

$$H(x^0, p^0, u^0, \lambda_0^0) \leq H(x^0, p^0, u, \lambda_0^0).$$

Более того, как мы убедились в § 4.2, это доказательство основывалось на возможности найти такой линейный функционал на \mathbb{R}_{n+1} (т. е. такой $(n+1)$ -мерный вектор), который отделяет луч, идущий в направлении убывающего качества, от некоторого выпук-

лого конуса; этот конус порожден особыми возмущениями, аппроксимирующими множество изменений, вызванных любыми вариациями управляющих воздействий. Все эти идеи допускают значительное обобщение (см. Кенон, Каллум и Полак [1967], Халкин [1967], Нейштадт [1966, 1967]. Здесь мы лишь вкратце затронем некоторые аспекты этих обобщений.

Мы будем рассматривать следующую основную задачу оптимизации¹⁾.

(4.1) **Задача.** Пусть P и Q — нормированные линейные пространства; Ω — некоторое подмножество пространства P ; π — выпуклое подмножество пространства Q ; f — отображение P в \mathbf{R} , а g — отображение P в Q . Требуется определить такое \hat{p} по P , что $\hat{p} \in \Omega$, $g(\hat{p}) \in \pi$ и $f(\hat{p}) \leq f(p)$, если $p \in \Omega$ и $g(p) \in \pi$.

Другими словами (если говорить не совсем строго), мы ищем на Ω минимум f при ограничении, требующем, чтобы g принадлежало π . Элемент \hat{p} множества Ω , на котором достигается этот минимум, ниже будет называться *оптимальным*. Необходимое условие оптимальности, полученное Кеноном, Каллумом и Полаком [1967], Халкиным [1967] и Нейштадтом [1966, 1967], грубо говоря, имеет следующий вид. Если \hat{p} оптимально, если существует подходящее приближение M к Ω в точке \hat{p} и если существует подходящее приближение h для отображения $(f(\cdot), g(\cdot)): P \rightarrow \mathbf{R} \times Q$, то найдется такое отличное от нуля $\lambda \in (\mathbf{R} \times Y)^*$, которое разделяет

$$h(M) \text{ и } \rho = \{(b, \pi): b < 0, \pi \in \Pi\}.$$

Естественно, что основная трудность состоит в определении понятия «подходящее приближение». В том случае, когда $P = \mathbf{R}_n$, $Q = \mathbf{R}_m$, $\Pi = \{0\}$, а f и g непрерывно дифференцируемы (Кенон, Каллум, Полак [1967]), в качестве h можно выбрать просто якобиан отображения $(f, g): \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_{m+1}$, так что

$$(f(p + \delta p), g(p + \delta p)) = (f(p), g(p)) + h(p) \delta p + o(\|\delta p\|),$$

а M удовлетворяет следующему условию: если $\delta p^1, \dots, \delta p^k$ суть линейно независимые элементы из M , то найдется такое $\varepsilon > 0$ и такое непрерывное отображение ξ выпуклой оболочки²⁾ $\{\hat{p}, \hat{p} + \varepsilon \delta p^1, \dots, \hat{p} + \varepsilon \delta p^k\}$ в Ω , что $\xi(\hat{p} + \delta p) = \hat{p} + \delta p + o(\|\delta p\|)$.

Доказательство различных результатов, касающихся необходимых условий оптимальности, всегда зависит от свойств выпуклых

¹⁾ Дальнейшие обобщения потребовали бы привлечения понятий, выходящих за рамки этой книги.

²⁾ *Выпуклой оболочкой* $\{\hat{p}, \hat{p} + \varepsilon \delta p^1, \dots, \hat{p} + \varepsilon \delta p^k\}$ называется множество всех таких p , что $p = r_0 \hat{p} + r_1 (\hat{p} + \varepsilon \delta p^1) + \dots + r_k (\hat{p} + \varepsilon \delta p^k)$, где $\sum_{i=0}^k r_i = 1$ и $r_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, k$ (Атанс, Фалб [1966] или Данфорд, Шварц [1958]).

множеств и теоремы Брауэра о неподвижной точке. Дополнительные подробности читатель найдет в работах, ссылки на которые приведены выше (см. также приложение А).

ПРИЛОЖЕНИЕ

4.А Необходимые условия оптимальности

В этом параграфе мы познакомимся с общими результатами относительно необходимых условий оптимальности, полученными Кеноном, Каллумом и Полаком [1967, Халкином [1967] и Нейштадтом [1966, 1967]. Наше изложение основывается на работе Фалба и Полака [1968], для понимания нижеследующего материала от читателя требуются довольно глубокие математические познания.

Предположим, что X есть локально выпуклое вещественное топологическое векторное пространство. Рассмотрим задачу минимизации вещественной функции f на некотором подмножестве Ω множества X при выполнении конечномерных ограничений вида $g(x) = 0$. Для того чтобы получить для этой задачи необходимые условия минимальности, потребуется ввести понятие приближения (аппроксимации).

(А.1) **Определение.** Пусть f есть отображение из X в \mathbb{R} , а g — из X в \mathbb{R}_m . Выпуклый конус $A(\hat{x}, \Omega) \subset X$ называется *приближением множества Ω в точке \hat{x} относительно f и g* , если найдутся (i) некоторый непрерывный линейный функционал $f'(\hat{x})$, определенный на X , и (ii) некоторое непрерывное линейное преобразование $g'(\hat{x})$ из X в \mathbb{R}_m , которые удовлетворяют следующим условиям:

Для любого конечного множества $\{\delta x_1, \dots, \delta x_h\}$ линейно независимых элементов $A(\hat{x}, \Omega)$ найдутся

(а) такое $\varepsilon_1 > 0$;

(б) такое непрерывное отображение ψ множества, сопряженного относительно $\{\varepsilon_1 \delta x_1, \dots, \varepsilon_1 \delta x_h\}$, в $\Omega - \{\hat{x}\}$ (где ψ может зависеть от ε_1 и $\{\delta x_1, \dots, \delta x_h\}$) и

(с) такие непрерывные отображения o_f и o_g пространства X в \mathbb{R} и \mathbb{R}_m соответственно, что

$$(A.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |o_f(\varepsilon \delta x)|/\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|o_g(\varepsilon \delta x)\|/\varepsilon = 0$$

равномерно по δx (где δx — элемент множества, сопряженного множеству $\{\delta x_1, \dots, \delta x_h\}$, т. е. $\delta x \in \{\delta x_1, \dots, \delta x_h\}^*$),

$$(A.3) \quad \begin{aligned} f(\hat{x} + \psi(\varepsilon \delta x)) &= f(\hat{x}) + \varepsilon f'(\hat{x}) \delta x + o_f(\varepsilon \delta x), \\ g(\hat{x} + \psi(\varepsilon \delta x)) &= g(\hat{x}) + \varepsilon g'(\hat{x}) \delta x + o_g(\varepsilon \delta x) \end{aligned}$$

при любых δx из указанного множества и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Необходимо отметить следующее. Пусть f и g дифференцируемы в точке \hat{x} , и пусть $C(\hat{x}, \Omega)$ является «линеаризацией Ω в точке \hat{x} » (т. е. $C(\hat{x}, \Omega)$ представляет собой выпуклый конус, содержащийся в X , для которого выполняются условия, аналогичные условиям (а) и (б) из определения (А.1)). Тогда $C(\hat{x}, \Omega)$ также является и приближением Ω в точке \hat{x} относительно f и g . Отметим также, что если записать g в виде $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, то некоторые компоненты $g'_i(x)$ можно заменить выпуклыми (а не линейными) функционалами, а определение по-прежнему будет содержательным (Халкин [1967], Нейштадт [1966, 1967]). Это обобщение потребует заменить основную лемму из теории необходимых условий оптимальности более сильной. Другой путь обобщения состоит в замене пространства R_m произвольным нормированным линейным пространством. Однако в этом случае приходится также требовать, чтобы некоторые (относительные) внутренние точки конуса

$$C(\hat{x}) = \{(f'(\hat{x})\delta x, g'(\hat{x})\delta x) : \delta x \in A(\hat{x}, \Omega)\},$$

лежащего в $R \oplus E$ (прямой сумме R и E), содержались в наименьшем замкнутом подпространстве пространства $R \oplus E$, содержащем конус $C(\hat{x})$. Это обобщение не требует никаких принципиальных изменений.

Располагая теперь подходящим понятием приближения, мы в состоянии приступить к выяснению необходимых условий оптимальности. В дальнейшем рассматривается следующая задача.

Задача. Пусть X есть некоторое локально выпуклое топологическое векторное пространство; f и g — отображения X в R и R_m соответственно, а Ω — некоторое подмножество пространства X . Обозначим через X_g такое подмножество пространства X , что $X_g = \{x : g(x) = 0\}$. Требуется определить такое x^0 из $X_g \cap \Omega$, что $f(x^0) \leq f(x)$ при всех $x \in X_g \cap \Omega$.

Решение x^0 этой задачи будем называть оптимальным элементом.

(А.4) **Лемма.** Если x^0 есть оптимальный элемент и если $A(x^0, \Omega)$ есть приближение Ω в точке x^0 относительно f и g , то существует такой не равный тождественно нулю линейный функционал p , определенный на $R \oplus R_m$, что $p[(f'(x^0)\delta x, g'(x^0)\delta x)] \leq 0$ при любых δx из замыкания $\overline{A(x^0, \Omega)}$ множества $A(x^0, \Omega)$, т. е. найдется такой ненулевой вектор $p = (p_0, p_1, \dots, p_m)$ из $R \oplus R_m$, что $p_0 \leq 0$ и

$$(A.5) \quad \langle p, (f'(x^0)\delta x, g'(x^0)\delta x) \rangle \leq 0$$

при всех δx из $\overline{A(x^0, \Omega)}$.

Доказательство. (Дакуна, Полак [1967]). Это доказательство, которое мы только наметим здесь, опирается на теорему разделения

выпуклых множеств (Данфорд, Шварц [1958]) и теорему Брауэра о неподвижной точке (Дьедонне [1960]).

Пусть x^0 есть требуемый оптимальный элемент, а $C(x^0)$ есть конус $\{(f'(x^0)\delta x, g'(x^0)\delta x): \delta x \in A(x^0, \Omega)\} \subset \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_m$. Но так как $A(x^0, \Omega)$ представляет собой выпуклый конус, а отображения $f'(x^0)$ и $g'(x^0)$ линейны, конус $C(x^0)$ тоже должен быть выпуклым. Обозначим через ρ открытый луч в $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_m$ вида

$$(A.6) \quad \rho = \{(y_0, 0, \dots, 0): y_0 < 0\}.$$

Заметим, что ρ можно рассматривать как выпуклый конус. Мы утверждаем, что $C(x^0)$ и ρ разделяются в пространстве $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_m$.

Если последнее утверждение верно, то найдется такой отличный от нуля вектор

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_m)$$

из $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_m$, что для всех δx из $A(x^0, \Omega)$ будет

$$(A.7) \quad \langle p, (f'(x^0)\delta x, g'(x^0)\delta x) \rangle \leq 0$$

и для всех y из ρ будет

$$(A.8) \quad \langle p, y \rangle \geq 0.$$

В силу непрерывности $f'(x^0)$ и $g'(x^0)$ из неравенств (A.7) и (A.8) будет следовать утверждение леммы.

Поэтому предположим, что $C(x^0)$ и ρ неразделимы. Тогда $C(x^0) \cap \rho$ не пусто, и найдется такое δx_1 из $A(x^0, \Omega)$, что

$$(A.9) \quad f'(x^0)\delta x_1 < 0 \quad \text{и} \quad g'(x^0)\delta x_1 = 0.$$

Более того, $g'(x^0)A(x^0, \Omega) = \mathbf{R}_m$, т. е. содержит 0 как внутреннюю точку (в противном случае должен существовать вектор вида $(0, q)$, $q \neq 0$, разделяющий $C(x^0)$ и ρ). Отсюда следует, что существует такой симплекс $[z_1, z_2, \dots, z_{m+1}] \subset \mathbf{R}_m$, содержащий 0 в качестве внутренней точки, что

$$(A.10) \quad [z_1, \dots, z_{m+1}] \subset g'(x^0)A(x^0, \Omega), \quad \text{т. е.} \quad z_i = g'(x^0)\delta x_i, \quad \text{где} \\ \delta x_i \in A(x^0, \Omega) \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, m+1;$$

$$(A.11) \quad \psi(\delta x) \in (\Omega - \{x^0\}) \quad \text{при всех} \quad \delta x \in \{\delta x_1, \dots, \delta x_{m+1}\}^*, \\ \text{где } \psi - \text{отображение из определения } A(x^0, \Omega);$$

$$(A.12) \quad f'(x^0)\delta x_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1;$$

$$(A.13) \quad \{z_2 - z_1, \dots, z_{m+1} - z_1\} \quad \text{является базисом для } \mathbf{R}_m.$$

Существование симплекса $[z_1, \dots, z_{m+1}]$, удовлетворяющего условиям (A.10), (A.11) и (A.12), нетрудно установить см. (Дакуна, Полак [1967]). Условие же (A.13) выполняется для любого симплекса, а так как $z_j - z_1$, $j = 2, \dots, m+1$, образует базис для \mathbf{R}_m ,

линейное отображение $L: R_m \rightarrow X$ можно определить, положив, что

$$(A.14) \quad L(z_j - z_1) = \delta x_j - \delta x_1; \quad j = 2, \dots, m+1.$$

Если $z = \sum r_i z_i + (1 - \sum r_j) z_1$ принадлежит симплексу $[z_1, \dots, z_{m+1}]$, то положим, что

$$(A.15) \quad \varphi(z) = L(z - z_1) + \delta x_1 = \sum r_j \delta x_j + (1 - \sum r_j) \delta x_1.$$

Легко видеть, что φ представляет собой непрерывное отображение симплекса в $\{\delta x_1, \dots, \delta x_{m+1}\}^*$.

Затем для $0 < \alpha \leq 1$ определим непрерывное отображение h_α из $\alpha[z_1, \dots, z_{m+1}]$ в R_m следующим образом:

$$(A.16) \quad h_\alpha(\alpha z) = -g(x^0 + \psi(\alpha[L(z - z_1) + \delta x_1])) + \alpha z.$$

Но в соответствии со свойствами приближения имеем

$$(A.17) \quad h_\alpha(\alpha z) = -o_g(\alpha L(z - z_1) + \alpha \delta x_1)$$

и

$$(A.18) \quad o_g(\alpha L(z - z_1) + \alpha \delta x_1) \in \alpha[z_1, \dots, z_{m+1}]$$

при всех α , $0 < \alpha \leq \alpha_0$, и некотором α_0 . Более того, поскольку $f'(x^0)\delta x_i < 0$, $i = 1, \dots, m+1$, и $A(x^0, \Omega)$ является приближением, справедливо также, что

$$(A.19) \quad f(x^0 + \psi(\alpha L(z - z_1) + \alpha \delta x_1)) < f(x^0)$$

при всех α , $0 < \alpha \leq \alpha_1$, и некотором α_1 .

Обозначая $\min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ через β , мы с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке (Дьедонне [1960]) устанавливаем существование такого элемента z_β из $\beta[z_1, \dots, z_{m+1}]$, что $h_\beta(\beta z_\beta) = \beta z_\beta$. Но в таком случае из соотношения (A.16) следует, что если

$$x = x^0 + \psi(L(z_\beta - \beta z_1) - \beta \delta x_1),$$

то $g(x) = 0$, $x \in \Omega$ (так как $x - x^0 \in \psi[\{\delta x_1, \dots, \delta x_{m+1}\}^*] \subset \subset \Omega - \{x^0\}$) и $f(x) < f(x^0)$, согласно соотношению (A.19). Но это противоречит оптимальности x^0 , и, следовательно, наша лемма доказана.

Мы воспользуемся этой леммой для того, чтобы получить принцип максимума. В связи с этим мы займемся теперь задачей оптимального управления и покажем, как нужно изменить ее формулировку, чтобы можно было использовать лемму (A.4). Итак, рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$(A.20) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $x(t) \in R_n$ есть состояние системы, $u(t) \in R_m$ есть векторное управляющее воздействие, а f отображает $R_n \times R_m$ в R_n .

Предположим, что

$$(A.21) \quad u(t) \in U \subset \mathbf{R}_n \text{ при (почти) всех } t,$$

$$(A.22) \quad u(\cdot) \text{ измеримо и существенно ограничено,}$$

$$(A.23) \quad f(x, u) \text{ непрерывна на } (\mathbf{R}_m \times \bar{U}),$$

$$(A.24) \quad f(x, u) \text{ непрерывно дифференцируема по } x.$$

Предположим, что начальное многообразие состоит из единственной точки x_0 (т. е. $x(t_0) = x_0$) и что конечное многообразие определяется некоторой функцией h из \mathbf{R}_n в \mathbf{R}_p , принадлежащей классу C^1 и такой, что

$$(A.25) \quad \partial h / \partial x \text{ имеет максимальный ранг.}$$

Другими словами, конечное многообразие S_1 определяется следующим образом:

$$(A.26) \quad S_1 = \{x: h(x) = 0\},$$

и многообразие S_1 гладкое. Кроме того, потребуем, чтобы функционал качества определял лишь качество траекторий $L(x, u)$, где L отображает $\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m$ в \mathbf{R} и непрерывно по x и u , а также непрерывно дифференцируемо по x . Таким образом, функционал качества управления $u(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$(A.27) \quad J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_u(t), u(t)) dt,$$

где $x_u(t)$ — решение уравнения (A.20) при начальных условиях (x_0, t_0) , соответствующее управлению $u(\cdot)$; здесь предполагается, что $u(\cdot)$ переводит систему из состояния x_0 в состояние, принадлежащее S_1 (т. е. $x_u(t_1) \in S_1$). В этих предположениях поставленная выше задача может быть сформулирована следующим образом: *определить управление $u(t)$ (где $u(t) \in U$ при всех t) и соответствующее решение $x_u(t)$ уравнения (A.20), такие, что $x_u(t_0) = x^0$, $x_u(t_1) \in S_1$, а функционал $J(u(\cdot))$ минимален.*

Попытаемся теперь перефразировать эту задачу так, чтобы возникла возможность использования леммы (A.4). Прежде всего перегрузим эту задачу в расширенное пространство состояний \mathbf{R}_{n+1} . Другими словами, станем обозначать через y типичный элемент из \mathbf{R}_{n+1} , причем

$$(A.28) \quad y = (x_0, x), \quad x \in \mathbf{R}_n,$$

через F обозначим отображение $\mathbf{R}_{n+1} \times \mathbf{R}_m$ в \mathbf{R}_{n+1} , задающееся условием

$$(A.29) \quad F(y, u) = (L(x, u), f(x, u)),$$

и будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$(A.30) \quad \dot{y} = F(y, u)$$

с начальным условием

$$(A.31) \quad y(t_0) = y_0 = (0, x_0)$$

и конечным многообразием $\mathbf{R} \times S_1$. Теперь мы можем поставить задачу об определении такого управления $u(t)$ (где $u(t) \in U$ при любых t) и соответствующем решении $y_u(t)$ уравнения (A.30), что $y_u(t_0) = y_0$, $y_u(t_1) \in \mathbf{R} \times S_1$ и $y_0(t_1) (=J(u(\cdot)))$ минимально. Ясно, что эта задача эквивалентна исходной.

Заметим затем, что решения $y_u(\cdot)$ уравнения (A.30) абсолютно непрерывны на промежутке $[t_0, t_1]$. Обозначим через Ω множество всевозможных абсолютно непрерывных функций $y_u(\cdot)$, удовлетворяющих уравнению (A.30) и условию (A.31) для некоторого $u(\cdot)$, удовлетворяющего условию (A.22). Прежде чем определять отображения f и g , введем некоторое локально выпуклое линейное топологическое пространство X , содержащее Ω . Для этого обозначим через $C[t_0, t_1]$ нормированное линейное пространство непрерывных функций $y(\cdot)$, определенных на промежутке $[t_0, t_1]$ и принимающих значения в \mathbf{R}_{n+1} , с нормой

$$\|y(\cdot)\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \{\|y(t)\|\}.$$

Обозначим через \mathcal{U} множество всех принимающих значения из \mathbf{R}_{n+1} и определенных на $[t_0, t_1]$ функций $z(\cdot)$, для которых найдется такая последовательность $x_j(\cdot)$ из $C[t_0, t_1]$, что

$$(A.32) \quad x_{j,i}(t) \leq x_{j+1,i}(t) \quad \text{для всех } t, i=0, \dots, n, j=1, \dots,$$

где $x_{j,i}$ есть i -я компонента последовательности x_j , а

$$(A.33) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t) = z(t)$$

при всех t из $[t_0, t_1]$. Заметим, что $\mathcal{U} = \prod \mathcal{P}_i$, где \mathcal{P}_i есть множество полунепрерывных сверху вещественных функций t , определенных на промежутке $[t_0, t_1]$. Обозначая $\mathcal{U} - \mathcal{U}$ через X , мы легко убедимся в том, что пространство X линейно. Определим на X топологию, выбрав в качестве подбазы семейство множеств

$$(A.34) \quad \{z(\cdot) : z(t) \in \mathcal{O}\},$$

где t есть некоторая точка из $[t_0, t_1]$, а \mathcal{O} есть некоторое открытое множество из \mathbf{R}_{n+1} ¹⁾. Пространство X локально выпуклое топологическое и линейное с нормой, согласующейся с этой топологией, и $\Omega \subset X$. Обозначим затем через f и g такие отображения, что

$$(A.35) \quad f(z(\cdot)) = z_0(t_1),$$

$$(A.36) \quad g(z(\cdot)) = h(z_1(t_1), \dots, z_n(t_1)),$$

¹⁾ Такая топология называется *поточечной*.

где через $z_i(\cdot)$, $i = 0, \dots, n$, обозначена i -я компонента для $z(\cdot)$. Ясно, что оба эти отображения непрерывны.

Обозначим через $\hat{y}_a(\cdot)$ некоторый элемент из Ω и построим приближение $A(\hat{y}_a, \Omega)$ пространства Ω в точке \hat{y}_a относительно f и g . Пусть $I \subset [t_0, t_1]$ есть множество регулярных точек \hat{u} , т. е. $t \in I$ тогда и только тогда, когда $t_0 < t < t_1$, и условие

$$(A.37) \quad \lim_{\mu(I) \rightarrow 0} \frac{\mu(\hat{u}^{-1}(N) \cap J)}{\mu(J)} = 1$$

справедливо для каждой окрестности N точки $\hat{u}^{-1}(t)$ и каждого подинтервала $J \subset I$, где $t \in J$ (здесь μ есть лебегова мера на I)¹⁾. Заметим, что $\mu(I) = t_1 - t_0 = \mu([t_0, t_1])$. Обозначим через $\Phi(t, \tau)$ переходную матрицу линейного дифференциального уравнения

$$(A.38) \quad \delta \dot{y} = \frac{\partial F}{\partial y}(\hat{y}_a, \hat{u}) \delta y.$$

Другими словами, $\Phi(t, \tau)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$(A.39) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = \frac{\partial F(\hat{y}_a(t), \hat{u}(t))}{\partial y} \Phi(t, \tau),$$

удовлетворяющим условию

$$(A.40) \quad \Phi(t, t) = I,$$

где I — единичная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$. Если $s \in I$ и $u \in U$, то обозначим через $\delta y_{s,u}$ решение уравнения (A.38), удовлетворяющее условию

$$(A.41) \quad \delta y_{s,u}(s) = F(\hat{y}_a(s), u) - F(\hat{y}_a(s), \hat{u}(s)),$$

а через $\delta z_{s,u}$ обозначим такой элемент X , что

$$(A.42) \quad \delta z_{s,u}(t) = \begin{cases} 0 & t_0 \leq t < s; \\ \delta y_{s,u}(t), & s \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Наконец, пусть

$$(A.43) \quad A(\hat{y}_a, \Omega) = \{\delta z: \delta z = \sum \alpha_i \delta z_{s_i, u_i}, s_i \in I, u_i \in U, \alpha_i \geq 0\}.$$

Определим линейные отображения $f'(\hat{y}_a)$ и $g'(\hat{y}_a)$, положив

$$(A.44) \quad f'(\hat{y}_a) \delta z = \delta z_0(t_1),$$

$$(A.45) \quad g'(\hat{y}_a) \delta z = \frac{\partial h}{\partial x}(\delta z_1(t_1), \dots, \delta z_n(t_1))(\delta z_1(t_1), \dots, \delta z_n(t_1)),$$

¹⁾ Важность регулярных точек объясняется следующим. Если τ есть регулярная точка управления $u(\cdot)$, а функция $g(t, u)$ непрерывна, то интеграл $\int_{\tau+ae}^{\tau+be} g(t, u(t)) dt = \varepsilon(b-a)g(\tau, u(\tau)) + o(\varepsilon)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а ε достаточно мало.

где через $\delta z_0, \delta z_1, \dots, \delta z_n$ обозначены компоненты для δz . Основоплагающая работа Понтрягина [1961] содержит доказательство того, что выпуклый конус $A(\hat{y}_a, \Omega)$ действительно является приближением пространства Ω в точке \hat{y}_a относительно f и g . Для того чтобы дать представления о характере этого доказательства, построим отображение ψ для случая двух линейно независимых векторов δz_1 и δz_2 конуса $A(\hat{y}_a, \Omega)$. Можно предполагать (изменив порядок нумерации и вставляя нули, если необходимо), что

$$(A.46) \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i \delta z_{s_j}, u_j$$

при $i = 1, 2$ и что $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k$. Заметим тогда, что $\delta z \in \{\delta z_1, \delta z_2\}^*$ гарантирует, что

$$(A.47) \quad \delta z = \lambda_1 \delta z_1 + \lambda_2 \delta z_2 = \sum_{j=1}^k \delta t_j (\lambda_1, \lambda_2) \delta z_{s_j}, u_j,$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и

$$(A.48) \quad \delta t_j (\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \alpha_j^1 + \lambda_2 \alpha_j^2$$

для $j = 1, \dots, k$. Ясно, что множество $\{\delta z_1, \delta z_2\}^*$ гомеоморфно множеству $\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2): \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_i \geq 0\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ есть некоторое малое положительное число, и пусть

$$(A.49) \quad v_j = \begin{cases} -(\delta t_j + \dots + \delta t_k), & s_j = s_k, \\ -(\delta t_j + \dots + \delta t_r), & s_j = \dots = s_r < s_{r+1} \quad (j < k). \end{cases}$$

Рассмотрим полуоткрытые промежутки I_j вида

$$(A.50) \quad I_j = \{t \in I: s_j + \varepsilon v_j < t \leq s_j + \varepsilon (v_j + \delta t_j)\}$$

и предположим, что ε достаточно мало для того, чтобы I_j не пересекались. Определим возмущение $u(t)$ управления $\hat{u}(t)$, положив

$$(A.51) \quad u(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin \bigcup I_j; \\ u_j, & t \in I_j. \end{cases}$$

Обозначим через $y(t; \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ решение уравнения (A.40), удовлетворяющее начальному условию (A.41) с управлением $u(t)$. Легко видеть, что управление $u(t)$ допустимо и что $y(t; \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ зависит от λ_1 и λ_2 , так как δt_j зависит от λ_1 и λ_2 . Используя теперь известное свойство зависимости решения дифференциального уравнения от параметров (см., например, Дьедонне [1960]), мы можем установить, что $y(t; \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ является непрерывной функцией ε, λ_1 и λ_2 . Но тогда непрерывно и отображение ψ множества $\{\varepsilon \delta z_1, \varepsilon \delta z_2\}^*$ в $\Omega - \{\hat{y}_a\}$, удовлетворяющее условию

$$(A.52) \quad \psi(\varepsilon \delta z) = y(t; \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2) - \hat{y}_a(t).$$

Доказательство того, что φ обладает и остальными нужными свойствами, опирается на свойства регулярных точек и некоторые известные результаты теории дифференциальных уравнений. С подробностями этого доказательства можно ознакомиться по книге Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе и Мищенко [1961].

Воспользовавшись теперь леммой (А.4), мы получим следующую теорему Понтрягина.

(А.53) Теорема (принцип максимума). Если $u^0(\cdot)$ есть оптимальное управление, а $x^0(\cdot)$ — соответствующая оптимальная траектория, то существует векторная функция $p(\cdot)$, вектор $\lambda(t_1)$ из R_p и число $p_0 \leq 0$, такие, что выполняются следующие условия:

- (а) p_0 и $p(t)$ не равны тождественно нулю;
- (б) $x^0(\cdot)$, p_0 и $p(\cdot)$ удовлетворяют канонической системе дифференциальных уравнений

$$(A.54) \quad \dot{x}^0(t) = f(x^0(t), u^0(t)),$$

$$(A.55) \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^0(t), u^0(t)) p_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0(t), u^0(t))' p(t);$$

- (с) $u^0(t)$ максимизирует гамильтониан

$$(A.56) \quad p_0 L(x^0(t), u^0(t)) + \langle p(t), f(x^0(t), u^0(t)) \rangle \geq \\ \geq p_0 L(x^0(t), u) + \langle p(t), f(x^0(t), u) \rangle$$

относительно всевозможных u , принадлежащих U при всех t ;

- (d) $p(t_1)$ трансверсально S_1 в точке $x^0(t_1)$, т. е.

$$(A.57) \quad p(t_1) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^0(t_1)) \lambda(t_1).$$

Как уже отмечалось ранее, более общий вариант этой теоремы, учитывающий (например) ограничения в пространстве состояний, был доказан Нейштадтом [1966, 1967] и Халкином [1967].

5 Конструирование систем управления

Рассмотрим теперь, каким образом теоретические соображения из предыдущей главы можно использовать для конструирования систем управления. Начнем с изучения простой задачи оптимального по быстродействию управления объектом, который описывается двумя интегралами. Затем, в § 5.2, мы воспользуемся принципом Понтрягина (или необходимыми условиями оптимальности), чтобы найти оптимальное управление для задачи общего вида. А так как «практическое» решение большинства задач управления требует использования вычислительных методов, остаток этой главы мы и посвятим этим методам, как прямым, так и косвенным.

5.1 Один простой пример

Рассмотрим динамическую систему

$$(1.1) \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t),$$

у которой на управление наложено следующее ограничение:

$$|u(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t.$$

Целевое множество S для этой задачи имеет вид $\mathbf{R} \times \{(0, 0)\}$, так что это задача со свободным конечным моментом времени и фиксированным конечным состоянием. Предположим, что качество конечного состояния не оценивается ($K = 0$) и что показатель качества траектории имеет следующий вид:

$$L(x, u) = 1.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении допустимого управления, преобразующего произвольное заданное начальное состояние (ξ_1, ξ_2) в начало координат $(0, 0)$ за минимальное время¹⁾.

Убедимся прежде всего в том, что решение этой задачи существует. В справедливости этого утверждения нам поможет убедиться теорема (3.5) гл. 4, позволяющая установить, что множество $A(0, (\xi_1, \xi_2), \Omega)$ замкнуто; здесь Ω — множество допустимых управлений. Заметим еще, что рассматриваемая система полностью управляема относительно Ω , и, следовательно, $\bar{t} \times (0, 0)$ принад-

¹⁾ Это так называемая *задача оптимального быстродействия для объекта из двух интеграторов*. А так как система линейна и автономна, можно считать, что начальный момент времени t_0 равен нулю.

лежит $A(0, (\xi_1, \xi_2), \Omega)$ при некотором $\tilde{t} > 0$. Но если рассматривать задачу с целевым множеством $\tilde{S} = [0, \tilde{t}] \times \{(0, 0)\}$ и функционалом качества \tilde{t} , то такая задача имеет решение, поскольку множество $\tilde{S} \cap A(0, (\xi_1, \xi_2), \Omega)$ компактно. Тем более имеет решение и исходная задача на оптимальное быстроедействие. Установив существование оптимального управления, сосредоточим внимание на последовательной процедуре его построения.

Шаг 1. Определение H -минимального управления. Гамильтониан для этой задачи имеет вид

$$H(x, p, u) = 1 + x_2 p_1 + u p_2.$$

Если x_2 , p_1 и p_2 заданы и $p_2 \neq 0$, то минимум H как функции u для $u \in U = \{v: |v| \leq 1\}$ достигается при условии, что $u = -\operatorname{sgn}\{p_2\}$. Поэтому H -минимальное управление $u^0(x, p)$ имеет следующий вид:

$$u^0(x, p) = -\operatorname{sgn}\{p_2\}$$

(при условии, что $p_2 \neq 0$). Заметим, что H не вполне регулярно.

Шаг 2. Интегрирование канонических уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & \dot{x}_2(t) &= -\operatorname{sgn}\{p_2(t)\}, \\ \dot{p}_1(t) &= 0, & \dot{p}_2(t) &= -p_1(t), \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \xi_1, & x_2(0) &= \xi_2, \\ x_1(t^*) &= 0, & x_2(t^*) &= 0, \end{aligned}$$

где через t^* обозначен неизвестный конечный момент времени. Можно ли найти решение этих уравнений? Обозначим неизвестные значения $p_1(0)$ и $p_2(0)$ через π_1 и π_2 соответственно. Тогда

$$p_1(t) = \pi_1, \quad p_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t.$$

Заметим, что если только $p_1(t)$ и $p_2(t)$ не равны нулю тождественно, то $p_2(t)$ имеет не более одного нуля. А так как оптимальное управление существует, ситуация, в которой $p_1(t) = p_2(t) = 0$, невозможна. Поэтому, полагая $\Delta(t) = -\operatorname{sgn}[p_2(t)]$, мы получаем

$$\begin{aligned} (1.2) \quad x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t + \frac{t^2}{2} \Delta(t), \\ x_2(t) &= \xi_2 + t \Delta(t). \end{aligned}$$

Кроме того, ясно, что функция $\Delta(t)$ кусочно-постоянная и может быть либо тождественно равной $+1$ (или -1), либо менять значение один раз с 1 на -1 , или с -1 на 1 . Эти последовательности зна-

чений Атанс и Фалб [1966] называют кандидатами на оптимальность. Если теперь из уравнений (1.2) исключить время t , то получатся фазовые траектории в виде парабол (рис. 5.1). На этом рисунке стрелками показано направление увеличения времени t , сплошными линиями даны траектории для случая $\Delta \equiv 1$, а пунктиром — для случая $\Delta \equiv -1$.

Шаг 3. Вычисление закона управления. Из рис. 5.1 видно, что при $\Delta \equiv 1$ через начало координат проходит всего одна траекто-

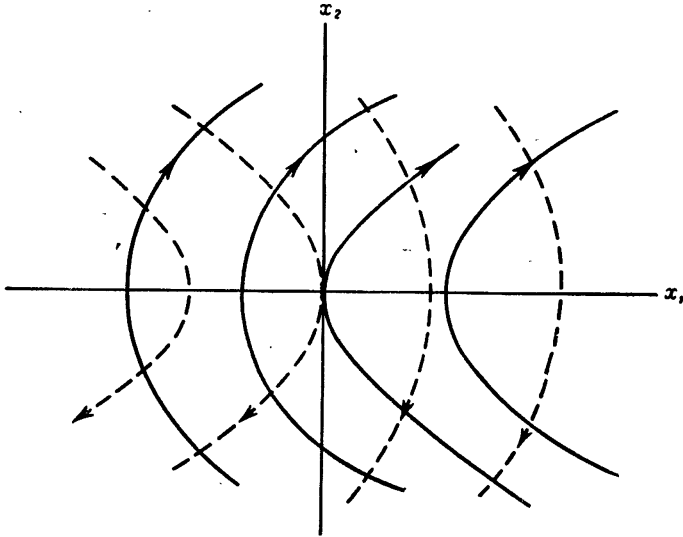


Рис. 5.1.

рия. Это же справедливо и для случая, когда $\Delta \equiv -1$. Обозначим теперь через $\alpha = \alpha_- \cup \alpha_+$ такую кривую на фазовой плоскости, что

$$\alpha_- = \left\{ (x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2, x_2 \geq 0 \right\},$$

$$\alpha_+ = \left\{ (x_1, x_2): x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, x_2 \leq 0 \right\},$$

а через R_- и R_+ — области выше и ниже α соответственно, как это показано на рис. 5.2. Докажем теперь, что зависимость оптимального управления от состояния системы описывается следующим законом управления:

$$(1.3) \quad u^0(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \alpha_+ \cup R_+, \\ -1, & (x_1, x_2) \in \alpha_- \cup R_- \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, мы можем воспользоваться процессом последовательного исключения. Например, если $(x_1, x_2) \in \alpha_+$, то только управление, тождественно равное $\{1\}$ (при котором $\Delta(t) \equiv 1$), обеспечит траекторию, проходящую через начало координат и удовлетворяющую другим необходимым условиям. (Более подробно об этом написано у Атанса и Фалба [1966].) Но если (ξ_1, ξ_2) есть наше заданное состояние и, скажем, $(\xi_1, \xi_2) \in R_-$, то оптимальное управление $u^0(t)$ должно быть равно -1 до тех пор, пока траектория системы не попадет на α (в действительности на α_+), а после этого

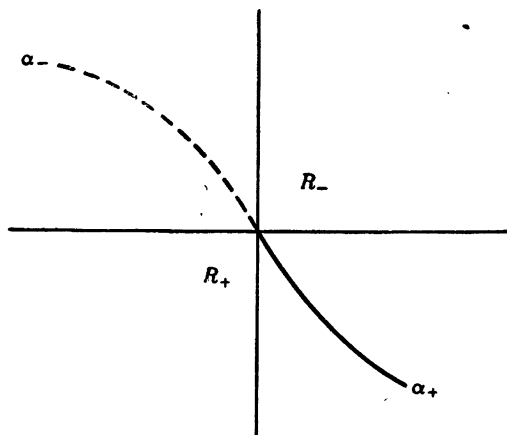


Рис. 5.2.

должно быть равно $+1$. Другими словами, оптимальное управление переключается с $+1$ на -1 на кривой α . В связи с этим кривую α и называют кривой «переключения». В системе с законом управления (1.3) зависимость времени, необходимого для достижения начала координат, от начального состояния системы описывается следующей формулой:

$$t^*(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \xi_2 + \sqrt{4\xi_1 + 2\xi_2^2}, & \xi_1 > -\frac{1}{2}\xi_2|\xi_2|, \\ -\xi_2 + \sqrt{-4\xi_1 + 2\xi_2^2}, & \xi_1 \leq -\frac{1}{2}\xi_2|\xi_2|. \end{cases}$$

Отметим, что $\partial t^*/\partial \xi_1$ претерпевает разрыв на кривой α и что, следовательно, глобального достаточного условия Гамильтона — Якоби не существует.

Подведем теперь некоторый итог сделанному. Мы исследовали гамильтониан задачи и определили H -минимальное управление. Затем мы проинтегрировали канонические управления, а по сути дела построили все экстремали (т. е. траектории, удовлетворяющие всем необходимым условиям) рассматриваемой задачи. Затем мы вос-

пользовались процессом исключения для того, чтобы показать, что эти экстремали единственны; связав эту единственность с доказанным ранее фактом существования оптимального управления (которое, естественно, должно быть экстремальным), мы вычислили искомый оптимальный закон управления. Таким образом, нам удалось выделить три основных этапа процесса вывода оптимального управления: (1) определение H -минимальных управлений; (2) построение экстремалей с помощью решения двухточечных граничных задач для канонической системы; (3) вычисление оптимального закона управления. Весь этот процесс осуществляется после того, как существование оптимального управления доказано.

5.2 Конструирование систем управления с помощью принципа Понтрягина

Построение оптимальных управлений с помощью принципа Понтрягина, или необходимых условий оптимальности, для задач общего вида аналогично процедуре, описанной в § 5.1. Однако в этом простом примере невозможно увидеть многие трудности, встречающиеся в более общей ситуации на разных этапах процесса. Рассмотрим поэтому каждый из этих этапов в отдельности, отмечая те затруднения, которые могут встретиться по пути.

Шаг 1. Определение H -минимального управления. Начнем с построения гамильтониана, а затем попытаемся определить H -минимальное управление. Если гамильтониан H регулярен, то определение H -минимального управления всегда возможно, по крайней мере теоретически. С другой стороны, если гамильтониан H нерегулярен, то возникают трудности. Например, в некоторых диапазонах изменения x и p гамильтониан $H(x, p, \omega)$ оказывается постоянным при всех ω из U . На деле это означает, что необходимые условия минимума такого гамильтониана не несут в себе никакой информации. Такие задачи называются *вырожденными*¹⁾. В то же время для различных значений x и p могут найтись такие различные точки U , что гамильтониан H будет достигать в них своего абсолютного минимума. В этом случае через данное начальное состояние может проходить несколько экстремалей, качества каждой из которых можно вычислить (такие примеры можно найти в книге Атанса и Фалба [1966]). Приведем один тривиальный пример.

(2.1) **Пример.** Рассмотрим систему $\dot{x}(t) = u(t)$, где $|u(t)| \leq 1$. Пусть $S = \mathbb{R} \times \{0\}$, $K = 1$, а $L(x, u) = |u|$. Тогда $H = |u| + pu$ и $\dot{p}(t) = 0$, так что $p(t)$ постоянно. Если, например, $p = 1$, то любое u из промежутка $[-1, 0]$ минимизирует H . Легко видеть, что если

¹⁾ Вырожденные задачи подробно рассматриваются в работах Джонсона [1965] и Джонсона и Гибсона [1963].

$\xi_1 > 0$ есть начальное состояние, то любое управление вида $u(t) = -k$, $k \in [0, 1]$, оптимально.

Шаг 2. Интегрирование канонической системы. На втором этапе нужно попытаться найти экстремали, проходящие через начальное состояние, решая (интегрируя) двухточечную граничную задачу для канонической системы. В общем случае это можно сделать лишь численными методами. Различные итеративные методы, такие, как метод градиента (Келли [1962]), а также методы, использующие выпуклость (особенно в задачах на оптимальное быстрое действие (Итон [1962], Нейштадт [1960]), или общие алгоритмы Ньютона или Ньютона — Рафсона (Канторович, Акилов [1959] или Ван Дайн [1965])), позволили успешно решить целый ряд упомянутых задач. Часто пользуются и таким подходом: пытаются «угадать» начальное значение косодействия $p(t_0)$, решить для канонической системы задачу Коши, проверить, выполняются ли конечные условия для p и x , и если нет, изменить начальное значение p и повторить весь этот процесс сначала. При этом, естественно, сразу же возникают проблемы сходимости и точности. Этим проблемам в настоящее время уделяется значительное внимание ученых; в § 5.3—5.5 мы еще вернемся к различным численным методам.

Шаг 3. Вычисление оптимального закона управления. После того как все экстремали определены, вычислим качество вдоль каждой экстремали, сравним полученные значения между собой и на основе этого сравнения выберем оптимальное. Если оптимальное управление и (или) экстремальные управления не единственные, то такая задача может оказаться достаточно сложной. Поэтому доказательство единственности экстремалей представляет несомненный интерес. Некоторые важные результаты в этом направлении были получены Атансом [1966] и Ли и Маркусом [1961].

Отметим еще раз, что использование необходимых условий предполагает существование оптимального управления. В общем случае вопрос существования является чрезвычайно сложным, и поэтому мы призываем к определенной осторожности при применении необходимых условий «вслепую».

Многочисленные примеры использования принципа Понтрягина для решения конкретных задач конструирования систем управления приводятся Атансом и Фалбом [1966].

5.3 Численные методы теории управления; общие замечания

Мы уже отмечали, что для практического решения большинства задач управления требуется прибегать к вычислительным методам, особенно итеративным. Все эти итеративные методы можно, грубо

говоря, разделить на две категории, на прямые и косвенные методы. Косвенные методы обычно опираются на сведение исходной задачи управления к задаче решения дифференциального уравнения (например, уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби) или системы дифференциальных уравнений (таких, как каноническая система из теории Понтрягина). Напротив, прямые методы обычно развиваются на основе построения подходящих минимизирующих семейств. *Но независимо от того, о каком методе или алгоритме идет речь, так или иначе приходится выяснять основные проблемы сходимости, точности и влияния вычислительной машины.* Другими словами, если у нас имеется итеративная (численная) процедура решения задачи управления, то нам требуется знать ответы на следующие вопросы.

1. Сходится ли эта процедура и существуют ли разумные условия, гарантирующие сходимость?

2. Есть ли возможность определить подходящие оценки ошибки на каждой итерации?

3. В какой степени ошибки округления, связанные с расчетами на цифровых вычислительных машинах, или неизбежные неточности (помехи) вычисления на аналоговых машинах влияют на точность полученных результатов?

Как и следовало предполагать, на эти вопросы нет общих ответов. Поэтому мы изучим теперь в довольно общем виде некоторые из подходов, использующихся для нахождения экстремали задач управления (т. е. для решения двухточечной граничной задачи для канонической системы). В следующем параграфе мы сосредоточим наше внимание на некоторых более конкретных аспектах применения этих главных итеративных методов для решения задач управления.

При рассмотрении итеративных методов, использующихся для получения экстремалей в задачах управления, мы будем интересоваться тремя характеристиками этих методов: (1) конкретным методом коррекции, (2) характером корректируемой величины и (3) конкретным условием экстремальности, на выполнение которого направлен рассматриваемый итеративный процесс. Мы познакомимся вкратце с тремя основными итеративными процедурами: градиентным методом, методом Ньютона (или Ньютона — Рафсона) и методом последовательных приближений. Мы также между делом отметим очень важный метод платежных функций, позволяющий учитывать ограничения. В действительности аппроксимационная теорема Мозера (Курант [1962]), которую мы приводим в § 5.5, часто может служить достаточной теоретической гарантией возможности применения платежных функций. Двумя типами величин, корректируемых в соответствии с одним из итеративных методов, являются векторы, например начальные условия для p , и

функции, например функция управления. Если положить в основу принцип максимума Понтрягина, то экстремальные управления и траектории системы должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) канонической системе дифференциальных уравнений;
- 2) условию минимизации гамильтониана;
- 3) граничным условиям, образованным начальными условиями, характером целевого множества и условиями трансверсальности ¹⁾.

Чаще всего используется подход, при котором строятся траектории, удовлетворяющие двум каким-нибудь из перечисленных условий, а затем эти траектории итеративно изменяются до тех пор, пока не будет выполнено и третье условие. В так называемом методе «окрестностей оптимума» (Брайсон, Денхем [1962], Денхем [1963], Брэкуэлл, Спейер, Брайсон [1963]) рассматриваемые траектории должны удовлетворять условиям (1) и (2), и среди них нужно найти траекторию, удовлетворяющую условию (3). В широко распространенном «градиентном» методе (см., например, Блюм [1964], Бушау [1963], Денхем [1963], Канторович, Акилов [1959], Келли [1960, 1962]), напротив, исходные траектории удовлетворяют условиям (1) и (3), а нужно добиться выполнения условия (2). Оставшийся возможный вариант, когда итерируется решение задачи, требующей выполнения условий (2) и (3), до тех пор пока не получится решение канонической системы (т. е. до тех пор, пока не будет выполнено условие (1)), часто называют методом квазилинеаризации (Калаба [1959], Мак-Джилл, Кеннет [1963]). В каждом из этих методов итерации должны осуществляться в соответствии с подходящим выбором методов преобразования основных параметров, будь это векторы или функции. Здесь нужно сослаться также на работу Калмана [1966а].

Рассмотрим теперь с абстрактных позиций самые основные итеративные методы. Предположим, что Π есть некоторое подмножество банахова пространства \mathcal{P} , причем элементы Π (или \mathcal{P}) будем называть *параметрами*. Обозначим через E некоторое отображение Π в банахово пространство \mathcal{E} и назовем его *отображением ошибок*. Задача всех итеративных процедур состоит в том, чтобы обратить в нуль «ошибку» $E(\pi)$ или по крайней мере сделать эту ошибку очень малой. Основная идея, положенная в основу всех трех упомянутых выше итеративных процедур, состоит в использовании линейных приближений ²⁾. Другими словами, если π_0 представляет собой предыдущую оценку значения параметра, то новая, скоррек-

¹⁾ Дополнительное условие экстремальности $H = 0$ иногда используется в итеративных процедурах, применяемых непосредственно для оптимизации неавтономных систем.

²⁾ Очень часто оказывается весьма полезным переходить к приближениям более высокого порядка (Коллатц [1964]). Однако такие вопросы здесь не рассматриваются.

тированная оценка π_n должна задаваться соотношением

$$\pi_n = \pi_0 - \Phi \{E(\pi_0)\},$$

где Φ является некоторым подходящим элементом из $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ (т. е. Φ есть некоторое непрерывное линейное преобразование \mathcal{E} в \mathcal{P}). Таким образом, отличительной чертой всех этих методов является выбор линейного преобразования Φ .

Градиентный метод. Предположим, что пространства \mathcal{P} и \mathcal{E} гильбертовы. Тогда, если преобразование E дифференцируемо на Π , то

$$E(\pi + h) = E(\pi) + \left. \frac{\partial E}{\partial \pi} \right|_{\pi} h + o(\|h\|),$$

где $\partial E / \partial \pi$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$. Но так как пространства \mathcal{P} и \mathcal{E} гильбертовы, сопряженное относительно $\partial E / \partial \pi$ преобразование $(\partial E / \partial \pi)^*$ должно принадлежать $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{P})$, что позволяет воспользоваться следующей итеративной схемой:

$$(3.1) \quad \pi_{k+1} = \pi_k - r_k \left(\frac{\partial E(\pi_k)}{\partial \pi} \right)^* E(\pi_k),$$

где r_k — некоторое вещественное число. Если $\mathcal{E} = \mathbf{R}$, то $(\partial E / \partial \pi)^*$ можно отождествить с градиентом ∇E (принадлежащим \mathcal{P}), и, положив $r_k = s_k / E(\pi_k)$, мы сможем переписать уравнение (3.1) в виде

$$(3.2) \quad \pi_{k+1} = \pi_k - s_k \nabla E(\pi_k).$$

Это хорошо известная формула градиентного метода, или метода наискорейшего спуска; параметр s_k называется *размером* k -го шага. Результаты, относящиеся к проблеме сходимости алгоритма (3.2), можно найти у Канторовича и Акилова [1959]. Несколько ниже мы познакомимся с одним из способов применения алгоритма (3.2) для решения задач управления.

Метод Ньютона. Предположим, что преобразование E дифференцируемо в точке $\hat{\pi}$. Тогда

$$(3.3) \quad E(\hat{\pi} + h) = E(\hat{\pi}) + \left(\frac{\partial E(\hat{\pi})}{\partial \pi} \right) h + o(\|h\|),$$

где $\partial E / \partial \pi$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$. Предположим временно, что уравнение (3.3) справедливо без учета погрешности $o(\|h\|)$. Отсюда находим

$$E(\hat{\pi} + h) = E(\hat{\pi}) + \frac{\partial E(\hat{\pi})}{\partial \pi} h.$$

Полагая $h = (-\partial E(\hat{\pi}) / \partial \pi)^{-1} E(\hat{\pi})$, получаем

$$E(\hat{\pi} + h) = 0.$$

Это соображение подводит нас к следующей итеративной процедуре:

$$(3.4) \quad \pi_{k+1} = \pi_k - \left(\frac{\partial E(\pi_k)}{\partial \pi} \right)^{-1} E(\pi_k)$$

(естественно, здесь предполагается, что такое обратное $\left(\frac{\partial E(\pi_k)}{\partial \pi} \right)^{-1}$ существует). Алгоритм (3.4) известен как алгоритм Ньютона. Часто уравнение (3.4) заменяют на

$$(3.5) \quad \pi_{k+1} = \pi_k - \left(\frac{\partial E(\pi_0)}{\partial \pi} \right)^{-1} E(\pi_k),$$

где π_0 — начальная оценка. Этот алгоритм называют модифицированным алгоритмом Ньютона. Теоремы о сходимости алгоритмов (3.4) и (3.5) содержатся в книге Канторовича и Акилова [1959]. Несколько позже мы используем этот метод в подходе к решению задач управления с помощью «окрестностей оптимума».

Метод последовательных приближений. Обычный метод последовательных приближений, известный также как метод Пикара, оказывается чрезвычайно полезным. В этом случае Φ есть некоторый элемент из $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{P})$, и мы просто полагаем, что

$$(3.6) \quad \pi_{k+1} = \pi_k - \Phi \{E(\pi_k)\}.$$

Естественно, что при этом стараются выбирать Φ разумным образом. Например, модифицированный алгоритм Ньютона (3.5) можно считать итеративным алгоритмом Пикара, в котором $\Phi = [\partial E(\pi_0)/\partial \pi]^{-1}$. Часто Φ выбирают сжимающим (уменьшающим норму), хотя для сходимости алгоритма это и не обязательно. Различные свойства метода последовательных приближений рассматриваются в книгах Коллатца [1964] и Канторовича и Акилова [1964]. К сожалению, этот метод мало использовался для решения задач управления, и ниже мы укажем на возможное его применение в рамках метода квазилинеаризации, используемого для решения задач управления (см. тем не менее работу Фалба и Дейонга [1968]).

5.4 Вычислительные методы теории управления; косвенные методы

Займемся теперь изучением возможности применения этих общих итеративных процедур для решения задач управления. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$(4.1) \quad \dot{x} = f(x, u).$$

Пусть начальное событие системы имеет вид (t_0, x_0) , целевое множество этой системы есть $S = \{t_1\} \times S_x$, а критерий качества содер-

жит лишь показатель качества конечного состояния $K(x)$. Напомним (§ 4.1), что если $\hat{u}(\cdot)$ есть некоторое заданное управление, а $\hat{x}(\cdot)$ — соответствующая траектория системы (решение уравнения (4.1)), то уравнение

$$(4.2) \quad \dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \psi + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\Lambda} h$$

называют *уравнением возмущенного движения*. Перепишем уравнение (4.2) в более привычном виде

$$(4.3) \quad \delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\Lambda} \delta u.$$

Поскольку начальное событие системы (t_0, x_0) фиксировано, начальные условия для системы (4.3) имеют следующий вид:

$$\delta x(t_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь три варианта использования описанных итеративных процедур.

Градиентный метод. В этом методе роль величины, которую мы собираемся итерировать, играет функция управления. Итак, предположим, что пространство \mathcal{B}_U гильбертово и что $\Omega \in L_2([t_0, t_1], \mathcal{B}_U)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle u(\cdot), v(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle u(t), v(t) \rangle_U dt.$$

Другими словами, пусть пространство параметров есть $\mathcal{P} = L_2([t_0, t_1], \mathcal{B}_U)$, пространство \mathcal{E} равно пространству вещественных чисел \mathbb{R} , а отображение ошибок E задается условием

$$E(u(\cdot)) = K(x_u(t_1)) - K^0,$$

где $K^0 = \inf \{K(x_u(t_1)) : u(\cdot) \in \Omega\}$. Заметим, что если $\hat{u}(\cdot) \in \Omega$, то $\nabla E(\hat{u}(\cdot))$ принадлежит $L_2([t_0, t_1], \mathcal{B}_U)$ и определяется по формуле

$$\nabla E(\hat{u}(\cdot))(\cdot) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \right)^* p(\cdot),$$

где $p(\cdot)$ представляет собой решение сопряженного уравнения

$$(4.4) \quad \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\Lambda} \right)^* p$$

(заметим, что $p(t)$ есть элемент пространства X^* , т. е. пространства, двойственного пространству состояний X). Сопряженную переменную (косостояние) $p(\cdot)$ иногда называют *функцией влияния*. Предположим затем, что целевое множество S_X задачи имеет следующий вид:

$$S_X = \{x: g_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\},$$

где все g_i имеют непрерывные производные, линейно независимые на S_x . Тогда в качестве граничного условия для $p(\cdot)$ воспользуемся условием

$$p(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x}(\hat{x}(t_1)) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(\hat{x}(t_1)),$$

где α_i — подходящие постоянные. Теперь легко видеть, что

$$E(\hat{u}(\cdot) + \delta u(\cdot)) = E(\hat{u}(\cdot)) + \int_{t_0}^{t_1} \langle \nabla E(\hat{u}(\cdot))(t), \delta u(t) \rangle dt + o(\|\delta u\|).$$

Наибольшее изменение E для заданного значения $\|\delta u(\cdot)\|^2$ получается в том случае, когда

$$\delta u(\cdot) = s \nabla E(\hat{u}(\cdot))(\cdot),$$

где s — некоторая постоянная. Отметим также, что, поскольку уравнение (4.4) линейно и однородно, мы можем $\nabla E(\hat{u}(\cdot))$ представить в виде

$$\nabla E(\hat{u}(\cdot)) = \nabla_K E(\hat{u}(\cdot)) + \sum_{i=1}^k \nabla_i E(\hat{u}(\cdot)),$$

где

$$\nabla_K E(\hat{u}(\cdot)) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\Lambda} \right)^* p_K(\cdot),$$

$$\nabla_i E(\hat{u}(\cdot)) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\Lambda} \right)^* p_i(\cdot),$$

а $p_K(\cdot)$ и $p_i(\cdot)$ являются решениями уравнения (4.4), удовлетворяющими граничным условиям

$$p_K(t_1) = \frac{\partial K}{\partial x}(\hat{x}(t_1)), \quad p_i(t_1) = -\alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(\hat{x}(t_1)).$$

Эти соотношения позволяют оценить характер изменения E из-за изменения K и положения конечного состояния. Перечислим теперь основные этапы решения задачи градиентным методом.

1. Выбор некоторого номинального управления $u_0(\cdot)$, которому соответствует некоторая траектория системы (решение уравнения (4.1)), удовлетворяющая необходимым граничным условиям (на практике лишь приближенно).

2. Интегрирование сопряженного уравнения для обратного направления времени с тем, чтобы определить функции $p_K(\cdot)$ и $p_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$.

3. Корректировка управления по схеме градиентной процедуры. Для этого нужно положить

$$u_1(\cdot) = u_0(\cdot) - s_{0K} \nabla_K E(u_0(\cdot)) - \sum_{i=1}^k s_{0i} \nabla_i E(u_0(\cdot)),$$

где s_{0k} , s_{0i} есть подходящие постоянные, определяющие размер шага, и пересчитать траекторию системы для управления $u_1(\cdot)$, чтобы получить новую номинальную траекторию $x_1(\cdot)$.

4. Повторение описанной процедуры до тех пор, пока значение E не станет достаточно малым (или пока ∇E не обратится в нуль).

Чаще всего выбор размеров шага основывают на интуиции или других каких-нибудь правдоподобных соображениях. Более того, описанный метод часто не слишком полезен в малых окрестностях оптимальной траектории. Наконец, на практике трудности возникают и при попытке удовлетворить конечным условиям. Для преодоления этих последних трудностей нередко прибегают к методу платежных функций. Например, вместо того чтобы пытаться удовлетворить условиям $g_i(x) = 0$, можно к показателю качества $K(x)$ добавить член вида

$$\sum_{i=1}^k a_i g_i^2(x), \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, k$$

(этот член и будет описывать платежные функции). Более подробное описание применения градиентных методов и многочисленные примеры можно найти в работах Блума [1964], Денхема [1963], Брайсона и Денхема [1962], Канторовича и Акилова [1959] и Келли [1960].

Метод Ньютона — Рафсона. В этом методе итерируется начальное условие для сопряженного уравнения. Чтобы построить процедуру вычислений по этому методу, предположим, что гамильтониан

$$H = \langle p, f(x, u) \rangle$$

регулярен, поэтому H -минимальное управление $u^0(x, p)$ всегда существует. Пусть

$$Y = X \times X^*.$$

Станем записывать типичный элемент y этого пространства Y в виде $y = (x, p)$. Если подставить H -минимальное управление $u^0(x, p)$ в канонические уравнения, то получится система

$$(4.5) \quad \frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{Y}(y(t)),$$

определенная в пространстве Y . Заметим, что \mathcal{Y} задается выражением

$$\mathcal{Y}(x, p) = (f(x, u^0(x, p)), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, u^0(x, p))^* p).$$

Теперь граничные условия для оптимальной траектории «расщепляются» на условия в начальный и конечный моменты времени. Например, если траектория $y^0(t)$ оптимальна, то известно, что $y^0(t_0)$ должен иметь вид (x_0, \cdot) , где x_0 есть заданное начальное

состояние, и что $y^0(t_1) = (x_1, p_1)$, где x_1 принадлежит целевому множеству S_X , а p_1 трансверсально S_X . Заметим теперь, что если бы мы знали истинное значение косостояния в начальный момент, то мы смогли бы проинтегрировать уравнение (4.5), последовательно увеличивая время, и получили бы в результате оптимальное решение (поскольку решения задачи Коши единственны). Если π принадлежит X^* , то уравнение (4.5) имеет единственное решение $y(t; \pi)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(t_0; \pi) = (x_0, \pi),$$

а «ошибка» выполнения конечных условий описывается разностью

$$y(t_1; \pi)_f - y^0(t_1)_f,$$

где индекс f указывает на то, что сравниваются лишь те составляющие элемента, которые нужны. Например, если $S_X = \{x_i\}$, т. е. состоит из единственной фиксированной точки, то $y^0(t_1)_f = x_1$, а $y(t_1; \pi)_f = x(t_1; \pi)$. Итак, пусть X^* играет роль пространства параметров, Y (или точнее Y_f) есть пространство \mathcal{E} , а преобразование E задается соотношением

$$E(\pi) = y(t_1; \pi)_f - y^0(t_1)_f.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial E}{\partial \pi} = \frac{\partial y(t_1; \pi)_f}{\partial \pi},$$

и, следовательно, итеративная процедура Ньютона — Рафсона описывается выражением

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \left(\frac{\partial y(t_1; \pi)_f}{\partial \pi} \right)^{-1} [y(t_1; \pi_k)_f - y^0(t_1)_f].$$

Таким образом, центральным моментом подхода является определение $\partial y(t_1; \pi)_f / \partial \pi$. Уравнение возмущенного движения

$$(4.6) \quad \dot{\delta y} = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} \delta y$$

часто используют с этой целью. Например, если исследуется конечномерная система, то, обозначая через e_1, \dots, e_n естественный базис пространства R_n (отождествляемого с X^*), мы легко установим, что решением уравнения (4.6), удовлетворяющим начальному условию

$$\delta y(t_0) = (0, e_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

является вектор

$$\frac{\partial y(t; \pi)}{\partial \pi_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае матрицу $\partial y(t_1; \pi) / \partial \pi$ (и тем более матрицу $\partial y(t_1; \pi)_f / \partial \pi$) можно вычислить с помощью не более чем n инте-

гирований уравнения возмущенного движения (4.6). Теперь, как и раньше, мы перечислим основные этапы процедуры.

1. Выбор некоторого начального значения косостояния.
2. Решение задачи Коши для канонических уравнений с использованием заданных начальных значений состояния, нулевого приближения начального значения косостояния и H -минимального управления.
3. Корректировка нулевого приближения начального значения p с помощью метода Ньютона. В частности, это требует определения $\partial y(t_1; \pi_k)_f / \partial \pi$, что обычно связано с интегрированием уравнения возмущенного движения. Алгоритм коррекции имеет следующий вид:

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \left(\frac{\partial y(t_1; \pi_k)_f}{\partial \pi} \right)^{-1} [y(t_1; \pi_k)_f - y^0(t_1)_f].$$

4. Повторение описанной процедуры до тех пор, пока ошибка не окажется достаточно малой.

В этой процедуре не нужно принимать никаких произвольных решений о размерах шага. Однако на каждом шаге здесь требуется вычисление обратного линейного преобразования (матрицы в конечномерном случае), что часто требует интегрирования линейных уравнений возмущенного движения. Поскольку сходимость этого метода имеет чаще всего квадратичный характер, он с успехом может применяться и в малой окрестности оптимума. Кроме того, во многих случаях модифицированный метод Ньютона позволяет обойти трудности, связанные с обращением линейного преобразования $\partial E / \partial \pi$. Дополнительную информацию и примеры можно найти в работах Балакришнана и Нейштадта [1964], Брайсона и Денхема [1962] и Канторовича и Акилова [1959].

Метод последовательных приближений. Здесь итерируются траектория и траектория сопряженной системы. По сути дела мы заменяем исходную краевую задачу некоторой последовательностью линейных краевых задач с фиксированной линеаризацией. И снова нам придется предположить, что гамильтониан H регулярен, что обеспечит существование H -минимальных управлений $u^0(x, p)$. Полагая $Y = X \times X^*$ и подставляя $u^0(x, p)$ в канонические уравнения, получаем систему

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{Y}(y(t)),$$

определенную в пространстве Y . Предположим, что граничные условия оптимальной траектории $y^0(t)$ имеют следующий вид:

$$y^0(t_0) = (x_0, \cdot), \quad y^0(t_1) = (\cdot, p_1),$$

т. е. начальное состояние и конечное состояние известны¹⁾. Если обозначить через $A(t)$ некоторое непрерывное отображение $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{L}(Y, Y)$, то можно рассматривать линеаризации, основанные на $A(t)$. Другими словами, если $y_1(t)$ есть некоторая дифференцируемая кривая в пространстве Y , такая, что

$$y_1(t_0) = y^0(t_0) = (x_0, \cdot), \quad y_1(t_1) = y^0(t_1) = (\cdot, p_1),$$

то можно рассматривать линейную двухточечную краевую задачу для уравнения

$$(4.7) \quad \frac{d \delta y(t)}{dt} = A(t) \delta y(t) + \mathcal{Y}(y_1(t)) - \frac{dy_1(t)}{dt}$$

с граничными условиями

$$(4.8) \quad \delta x(t_0) = 0, \quad \delta p(t_1) = 0.$$

Обозначим через $\delta y_1(t)$ решение этой линейной двухточечной граничной задачи. Тогда легко видеть, что $y_2(t) = y_1(t) + \delta y_1(t)$ также удовлетворяет требуемым граничным условиям. Укажем теперь основные этапы вычисления оптимального управления по этому методу.

1. Определение некоторой дифференцируемой кривой, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Решение линейной двухточечной краевой задачи (4.7) и (4.8).

3. Корректировка траектории с использованием соотношения

$$y_{k+1}(t) = y_k(t) + \delta y_k(t)$$

(заметим, что из-за неоднородности уравнения (4.7) описываемая итерационная процедура *не является линейной*).

4. Повторение описанной процедуры, пока δy не обратится в нуль или не станет достаточно малой²⁾.

Относительно описанной здесь процедуры известно очень мало такого, что было бы полезным на практике. Более подходящий метод квазилинеаризации получается в результате замены уравнения (4.7) на уравнение

$$\frac{d \delta y}{dt} = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y}(y) \delta y + \left[\mathcal{Y}(y) - \frac{dy}{dt} \right].$$

Результаты, относящиеся к теории квазилинеаризации, можно найти в работе Мак-Джилла и Кеннета [1963]. Весьма перспективными кажутся и дополнительные исследования в этом направлении, о которых сообщается в работе Фалба и Дейонга [1968].

Различные подходы к определению оптимальных управлений, рассмотренные до сих пор, основывались на решении двухточечных

¹⁾ Возможны, конечно, и другие комбинации, но их исследование мы предоставляем читателю.

²⁾ Простой расчет показывает, что если, скажем, $\delta y_k = 0$, то $\dot{y}_k = \mathcal{Y}(y_k)$.

краевых задач для канонических систем. В связи с этим указанные подходы должны быть отнесены к числу косвенных; они позволяют определять лишь экстремальные управления. Если же мы хотим, чтобы эти методы давали нам действительное управление (или его разумное приближение), их необходимо дополнить независимыми доказательствами существования и единственности экстремалей. Однако часто такие доказательства в литературе отсутствуют. Более того, во многих случаях оценить ошибку (или значение) функционала качества на каждом шаге итерации оказывается весьма затруднительным. В связи с этим мы обращаемся теперь к прямым методам.

5.5 Вычислительные методы теории управления; прямые методы

Центральная идея так называемых прямых методов состоит в введении понятия минимизирующего семейства. По мере нашего изложения мы приведем несколько относящихся сюда результатов и в том числе аппроксимационную теорему Мозера (Курант [1962]).

В третьей главе мы уже отмечали, что задачи управления можно рассматривать как частный случай задач минимизации функционала, определенного на некотором подмножестве нормированного линейного пространства. Встанем теперь на эту точку зрения. Рассмотрим нормированное линейное пространство \mathcal{R} , его непустое подмножество Φ , вещественный функционал J , определенный на \mathcal{R} , и задачу минимизации J на Φ . Предположим, что эта задача имеет смысл, т. е. что

$$(5.1) \quad -\infty < \inf_{\Phi} J(\cdot) = J^0 < \infty.$$

(5.2) **Определение.** Пусть $D = \{\delta: \delta \in [0, \infty)\}$ есть некоторое направленное вверх¹⁾ подмножество неотрицательных вещественных чисел. Тогда семейство \mathcal{R} элементов v_δ называется *минимизирующим J над Φ* , если

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} J(v_\delta) = J^0 = \inf_{\Phi} J(\cdot).$$

Если же, кроме того,

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} v_\delta = v^0,$$

где $v^0 \in \Phi$, то $\{v_\delta\}$ называют *сходящимся минимизирующим семейством*.

¹⁾ Направленное вверх множество D определяется следующим образом: если δ_1 и δ_2 принадлежат D , то найдется такой элемент $\delta_3 \in D$, что $\delta_1 < \delta_3$ и $\delta_2 < \delta_3$. Типичным примером направленного вверх множества может служить множество целых чисел.

В силу справедливости соотношения (5.1) минимизирующие семейства всегда существуют. Однако существование сходящихся минимизирующих семейств не обязательно. Если бы мы знали, что сходящееся минимизирующее семейство существует и что J достаточно «гладко» для того, чтобы

$$J(v^0) = J(\lim_{\delta \rightarrow \infty} v_\delta) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} J(v_\delta) = J^0,$$

тогда можно было бы заключить, что v^0 является искомым решением задачи минимизации. Эти соображения и составляют основу прямых подходов, которые по сути дела состоят из (1) построения подходящего сходящегося минимизирующего семейства и (2) доказательства гладкости J . Следующее предложение является характерным для тех требований, которые предъявляются в прямых методах к гладкости функционала J .

(5.3) Предложение. *Предположим, что семейство $\{v_\delta\}$ является минимизирующим и сходящимся с пределом v^0 и что J полунепрерывно снизу¹⁾ в точке v^0 . Тогда v^0 минимизирует J на Φ , т. е. тогда $J(v^0) = J^0 = \inf_{\Phi} J(\cdot)$.*

Доказательство. Поскольку семейство $\{v_\delta\}$ минимизирующее, а $v^0 \in \Phi$, имеем

$$(5.4) \quad J(v^0) \geq J^0 = \inf_{\Phi} J(\cdot) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} J(v_\delta).$$

Но с другой стороны, если $\varepsilon > 0$, то всегда найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что неравенство $\delta > \delta(\varepsilon)$ гарантирует справедливость неравенства

$$J(v^0) \leq J(v_\delta) + \varepsilon,$$

как следствие полунепрерывности J снизу в точке v^0 . Но тогда

$$J(v^0) \leq \lim_{\delta \rightarrow \infty} J(v_\delta) + \varepsilon = J^0 + \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$J(v^0) \leq J^0,$$

а это вместе с неравенством (5.4) доказывает наше предположение.

Обычно легко убедиться в том, что функционалы качества задач управления полунепрерывны снизу (или даже непрерывны). В связи с этим решающее значение в прямых методах приобретает построение сходящихся минимизирующих семейств. Для построения таких минимизирующих семейств известно несколько стандартных методов. Один класс таких методов опирается на приближение исходной задачи некоторой последовательностью (или семейством)

¹⁾ Напомним, что J полунепрерывно снизу в точке v^0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|v - v^0\| < \delta \Rightarrow J(v^0) \leq J(v) + \varepsilon$.

более простых задач. Здесь мы рассмотрим два таких метода. Первый из них состоит в замене задачи с дополнительными условиями задачей без таких условий, а второй — в замене общей задачи подходящей последовательностью конечномерных задач минимизации. Для простоты мы будем называть эти методы методом 1 и методом 2.

Метод 1. Предположим пока, что подмножество Φ пространства \mathcal{B} имеет следующий вид:

$$\Phi = \{v: \varphi(v) = 0\},$$

где φ — некоторая неотрицательная (т. е. $\varphi(v) \geq 0$ для всех v из \mathcal{B}) вещественная функция, полунепрерывная снизу относительно некоторой топологии \mathcal{F} на \mathcal{B} . Например, если ψ есть некоторое слабонепрерывное отображение \mathcal{B} в другое нормированное линейное пространство \mathcal{B}_1 , то функция $\varphi(v) = \|\psi(v)\|$ обладает указанными свойствами относительно слабой топологии на \mathcal{B} (Роте [1948]).

(5.5) Теорема. Пусть функционал J полунепрерывен снизу относительно топологии \mathcal{F} . Пусть также найдется некоторое неограниченное направленное вверх подмножество $D = \{\delta\}$ множества $[0, \infty)$, обладающее следующими свойствами:

(а) для каждого $\delta \in D$ найдется такое $v_\delta \in \mathcal{B}$, что при всех v^1 $v \in \mathcal{B}$ имеем

$$J(v_\delta) + \delta\varphi(v_\delta) \leq J(v) + \delta\varphi(v);$$

(б) найдется такое $v^0 \in \mathcal{B}$, что

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} v_\delta = v^0,$$

где предельный переход нужно понимать в терминах \mathcal{F} -топологии. Тогда v^0 принадлежит Φ , и $J(v^0) = J^0 = \inf_{v \in \Phi} \{J(v)\}$; следовательно, v^0 есть решение поставленной задачи.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Куранта [1962].

Важное значение этой теоремы в задачах управления объясняется тем, что она позволяет заменять задачи с такими дополнительными ограничениями, как краевые условия, задачами, свободными от этих ограничений. Например, как было видно из § 4.1 и 4.2, не составляет особого труда показать, что оптимальное управление приводит к экстремизации гамильтониана, если конечное состояние системы свободно, и что, как только конечное состояние зафиксировано, аналогичное доказательство становится трудным.

¹⁾ На самом деле необходимо, чтобы это условие выполнялось лишь на некотором подмножестве Ψ множества \mathcal{B} , содержащем Φ (т. е. $\mathcal{B} \supset \Psi \supset \Phi$).

В подобной ситуации можно попытаться использовать теорему (5.5) следующим образом. Предположим, что для нашей задачи целевым множеством является $\{t_1\} \times \{x_1\}$, где t_1 и x_1 фиксированы. Пусть $\varphi(u(\cdot))$ равно, например, $\frac{1}{2} \|x_u(t_1) - x_1\|^2$. Найдем тогда необходимые условия оптимальности для задачи со свободным конечным состоянием системы и функционалом качества $J(u(\cdot)) + \delta \varphi(u(\cdot))$. Считая, что существует подходящее сходящееся семейство решений этих задач со свободным состоянием, мы сможем получить необходимые условия оптимальности исходной задачи с фиксированным конечным состоянием. Для того чтобы перевести это утверждение на формальный язык, рассмотрим задачу управления с целевым множеством $\{t_1\} \times \{x_1\}$, где x_1 фиксировано, качество конечных состояний не оценивается (т. е. $K = 0$) и все пространство \mathcal{H}_U , Ω и X гильбертовы.

(5.6) **Следствие.** Предположим, что функционал J полунепрерывен снизу и что существует некоторое неограниченное направленное вверх подмножество $D = \{\delta\}$ множества $[0, \infty)$, обладающее следующими свойствами:

(а) для каждого $\delta \in D$ найдется такое $u_\delta(\cdot) \in \Omega$, что при всех $u(\cdot) \in \Omega$ справедливо неравенство

$$J(u_\delta(\cdot)) + \frac{\delta}{2} \|x_{u_\delta}(t_1) - x_1\|^2 \leq J(u(\cdot)) + \frac{\delta}{2} \|x_u(t_1) - x_1\|^2;$$

(б) существует такое m из $[0, \infty)$, что

$$(5.7) \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta \|x_{u_\delta}(t_1) - x_1\| = m;$$

(с) существует такое $u^0(\cdot) \in \Omega$, что

$$(5.8) \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} u_\delta(\cdot) = u^0(\cdot)$$

(относительно естественной топологии нормированного пространства Ω).

Тогда $u^0(\cdot)$ есть оптимальное управление, и существует такое косостояние $\lambda^0(\cdot)$, соответствующее управлению $u^0(\cdot)$, что

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^0(\cdot), \lambda^0(\cdot), u^0(\cdot)) = 0$$

почти всюду на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Оптимальность управления $u^0(\cdot)$ следует из теоремы (5.5). А так как $\partial H / \partial u$ непрерывно, из соотношения (5.8) находим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} x_{u_\delta}(\cdot) = x^0(\cdot).$$

Остается лишь показать, что существует предел

$$(5.9) \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \lambda_{\delta}(\cdot) = \lambda^0(\cdot)$$

и что этот предел удовлетворяет дифференциальному уравнению ¹⁾

$$(5.10) \quad \dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 \right)^* \lambda - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_0,$$

где через $\lambda_{\delta}(\cdot)$ обозначено косостояние, соответствующее управлению $u_{\delta}(\cdot)$ и такое, что

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x_{u_{\delta}}(\cdot), \lambda_{\delta}(\cdot), u_{\delta}(\cdot)) = 0$$

почти всюду на $[t_0, t_1]$. Существование косостояния $\lambda_{\delta}(\cdot)$ гарантируется теоремой (4.4), поскольку управление $u_{\delta}(\cdot)$ является оптимальным для задачи со свободным конечным состоянием. Более того (см. § 3.5),

$$\lambda_{\delta}(t_1) = \delta(x_{u_{\delta}}(t_1) - x_1),$$

и, следовательно, согласно соотношению (5.7), существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \lambda_{\delta}(t_1) = \hat{\lambda}.$$

Обозначим через $\lambda^0(\cdot)$ решение уравнения (5.10), удовлетворяющее следующему условию конечного состояния:

$$\lambda^0(t_1) = \lambda.$$

Отсюда в силу непрерывности $\partial f / \partial x$ и $\partial L / \partial x$ можно заключить, что соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{\delta} = \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_0$$

вместе гарантируют выполнение условий (5.9) и (5.10). А это доказывает наше следствие.

Заметим, что $u_{\delta}(\cdot)$ образует сходящееся минимизирующее семейство для J . Именно здесь и лежит основная трудность использования этого следствия, так как показать, что соотношения (5.7) и (5.8) действительно имеют место, часто оказывается весьма

¹⁾ В этом уравнении через $L(x, u)$ обозначено ядро функционала качества траектории. Другими словами,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_u(t), u(t)) dt.$$

сложным делом. Следующий пример иллюстрирует данный метод. Дальнейшая работа по развитию рассматриваемого метода кажется многообещающей и может привести к интересным и практически полезным результатам.

(5.11) **Пример.** Рассмотрим (скалярную) систему $\dot{x} = -x + u$, для которой $x(0) = \xi \neq 0$. Пусть целевое множество есть $S = \{T\} \times \{0\}$, где T фиксировано, а функционал качества J имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + u^2) dt.$$

Рассмотрим теперь задачу с целевым множеством $\{T\} \times \mathbb{R}$ и функционалом качества

$$\frac{\delta}{2} x(T^2) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + u^2) dt,$$

где $\delta \in (0, \infty)$. Тогда (как показано в книге Атанса и Фалба [1966]) эта последняя задача имеет решение

$$(5.12) \quad u_\delta(t) = -k_\delta(t) x_\delta(t).$$

где $k_\delta(t)$ удовлетворяет соответствующему уравнению Риккати и имеет следующий вид:

$$k_\delta(t) = \frac{(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) \frac{(\delta + 1 - \sqrt{2})}{(\delta + 1 + \sqrt{2})} e^{2\sqrt{2}(t-T)}}{1 - \frac{(\delta + 1 - \sqrt{2})}{(\delta + 1 + \sqrt{2})} e^{2\sqrt{2}(t-T)}}.$$

Соответствующая траектория $x_\delta(t)$ описывается выражением

$$(5.13) \quad x_\delta(t) = \xi \exp \left\{ \int_0^t [-1 - k_\delta(\tau)] d\tau \right\}$$

(см. Атанс, Фалб [1966]). Но так как $k_\delta(\tau)$ положительно, свойство (с) следствия 5.6 получается из соотношений (5.12) и (5.13), если мы покажем, что выполняется свойство (b) (т. е. что предел $\lim_{\delta \rightarrow \infty} x_\delta(T)$ существует и конечен). Для этого достаточно установить существование следующего предела:

$$(5.14) \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta \exp \left[- \int_0^T k_\delta(\tau) d\tau \right].$$

Но довольно сложные вычисления (которые мы оставляем читателю) показывают, что

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \int_0^T k_\delta(\tau) d\tau \right\} &= \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \right) \log \left[\frac{\delta(e^{2\sqrt{2}T}-1) + (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}T} + (\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right) \log \left[\frac{\{\delta(e^{2\sqrt{2}T}-1) + (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}T} + (\sqrt{2}-1)\} \{(\sqrt{2}+1) + \delta\}}{2\sqrt{2} \{\delta + (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}T}\}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Но отсюда находим

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta \exp \left[- \int_0^T k_\delta(\tau) d\tau \right] = \frac{2\sqrt{2}}{\exp(2\sqrt{2}T) - 1},$$

и наше утверждение доказано. Таким образом, оптимальное для нашей исходной задачи управление существует и может быть найдено предельным переходом в выражении (5.12) при $\delta \rightarrow \infty$.

Заметим, наконец, что если

$$\Phi = \{v: \varphi_i(C) = 0\},$$

где φ_i непрерывны, то по-прежнему можно использовать теорему (5.5). Например, если найдутся такие положительные постоянные m_i , что

$$|\varphi_i(v)| \leq m_i \|v\|, \quad \sum_i m_i^2 < \infty,$$

то

$$\Phi = \{v: \varphi(v) = 0\},$$

где

$$\varphi(v) = \sum_i m_i^2 \varphi_i^2(v),$$

и мы можем воспользоваться теоремой (5.5). Таким образом, описанный метод является существенно более общим, чем может показаться при беглом рассмотрении налагаемых им ограничений.

Метод 2. Перейдем теперь к изложению метода Ритца, состоящего в замене исходной общей задачи некоторой вложенной последовательностью конечномерных задач минимизации, решения которых образуют искомую минимизирующую последовательность.

Предположим, что $\omega_0, \omega_1, \dots$ есть некоторая последовательность элементов из \mathcal{B} , и обозначим линейную оболочку $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k$ через \mathcal{B}_k . Другими словами, пусть

$$\mathcal{B}_k = \left\{ v: v = \sum_0^k a_j \omega_j, a_j \in \mathbf{R} \right\}.$$

Тогда \mathcal{B}_k будет конечномерным подпространством пространства \mathcal{B} , а $\mathcal{B}_k \cap \Phi$ будет подмножеством множества Φ , которое мы обозначим через Φ_k . Ясно, что задача минимизации функционала J на Φ_k эквивалентна минимизации некоторой функции $(k+1)$ переменных при наличии дополнительных ограничений. Поскольку $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \dots$, ясно, что

$$\inf_{\Phi_0} J(\cdot) \geq \inf_{\Phi_1} J(\cdot) \geq \dots,$$

и если бы было известно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\Phi_k} J(\cdot) = J_0$$

и что для каждого k существует такой элемент $v_k \in \Phi_k$, что

$$J(v_k) = \inf_{\Phi_k} J(\cdot),$$

то v_k как раз и было бы искомым минимизирующим семейством. В этом и заключается главная идея метода Ритца. Приведем теперь условия, гарантирующие эффективность такого подхода. Нам придется ввести еще одно новое понятие.

(5.15) **Определение.** Если \mathcal{F} есть некоторая топология на \mathcal{B} , то последовательность $\{\omega_0, \omega_1, \dots\}$ называется *полной* в Φ (относительно \mathcal{F}), если Φ является подмножеством \mathcal{F} -замыкания для $\bigcup_k \mathcal{B}_k$. Другими словами, если v принадлежит Φ , а через $N(v)$ обозначена некоторая \mathcal{F} -окрестность v , то для некоторого k (вполне возможно, зависящего от $N(v)$) найдется $v'_k \in \Phi_k \cap N(v)$.

(5.16) **Теорема.** Пусть выполняются следующие условия:

(а) для каждого $k = 0, 1, \dots$ найдется такое v_k^0 из Φ_k , что

$$J(v_k^0) = \inf_{\Phi_k} J(\cdot);$$

(б) последовательность $\{\omega_0, \omega_1, \dots\}$ является *полной* в Φ относительно некоторой топологии \mathcal{F} ;

(с) функционал $J(\cdot)$ непрерывен в топологии \mathcal{F} .

Тогда $\{v_k: k = 0, 1, \dots\}$ образует минимизирующую последовательность для J над Φ .

Доказательство. Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$, а ϑ принадлежит Φ и такое, что

$$J(\vartheta) < J^0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

(напомним, что $J^0 = \inf J(\cdot)$). В силу непрерывности функционала J найдется такая \mathcal{F} -окрестность $N(\hat{v})$, что $v \in \Phi \cap N(\hat{v})$ гарантирует выполнение неравенства

$$|J(v) - J(\hat{v})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А так как $\{\omega_0, \omega_1, \dots\}$ полно в Φ , найдется $\hat{v}_k \in \Phi_k \cap N(\hat{v})$. Но отсюда следует

$$J(\hat{v}_k) < J^0 + \varepsilon.$$

Однако, согласно условию (а), имеем $J(v_k^0) \leq J(\hat{v}_k)$, следовательно,

$$J^0 \leq J(v_k^0) < J^0 + \varepsilon.$$

Отсюда сразу получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k^0) = J^0,$$

что и доказывает теорему.

Хотя метод Ритца довольно хорошо известен, в теории управления его используют недостаточно и дополнительные исследования в этом направлении будут безусловно плодотворными. Помня об этом замечании, мы дадим в заключение пример, показывающий, как можно приспособить метод Ритца к решению задач управления.

(5.17) Пример. Рассмотрим линейную динамическую систему с пространством состояния $X = L_2(\Delta, \mathbf{R})$, где Δ есть некоторая область из \mathbf{R}_n , и пространством Ω вида

$$\Omega = \{u(\cdot) : u(\cdot) \in L_2([t_1, t_2] \times \Delta, \mathbf{R}), \|u(\cdot)\|_\infty \leq 1\},$$

где $\|u(\cdot)\|_\infty = \text{ess sup} |u(\cdot)|$. Предположим, что x_0 есть некоторый заданный элемент из X и что $x_d(\cdot)$ является заданной кривой в X . Пусть функционал качества $J(u(\cdot))$ этой задачи имеет следующую форму:

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|x_u(t) - x_d(t)\|^2 dt,$$

где через $x_u(\cdot)$ обозначена траектория рассматриваемой системы, начинающаяся из x_0 в момент t_1 и отвечающая управлению $u(\cdot)$. Заметим, что Ω слабо компактно и выпукло, и что, поскольку функционал $J(\cdot)$ является непрерывным и выпуклым, этот функционал полунепрерывен снизу в слабой топологии. Но отсюда следует, что у $J(\cdot)$ существует минимум на Ω . Поэтому, если построить на множестве $[t_1, t_2] \times \Delta$ некоторую $(1/k)$ -сеть (см. рис. 5.3) и если обозначить через χ_1^k, \dots характеристические функции (непересекаю-

щихся) подмножеств пространства $[t_1, t_2] \times \Delta$, порожденных этой сетью, то легко видеть, что множество

$$\Omega_k = \{u(\cdot): u(\cdot) = \sum a_j x_j^k, |a_j| \leq 1\}$$

является слабо компактным выпуклым подмножеством множества Ω .

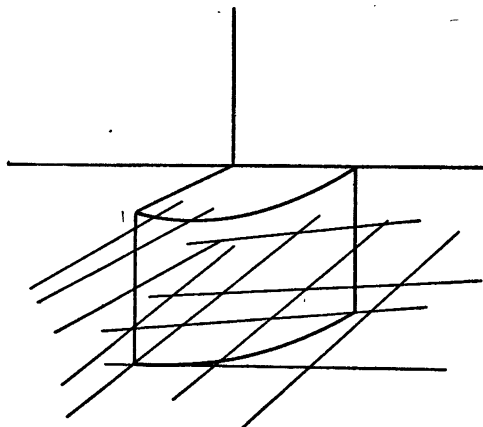


Рис. 5.3.

Таким образом, у функционала $J(\cdot)$ существует на Ω_k минимум $u_k^0(\cdot)$. Но так как $\bigcup \Omega_k$ (слабо) плотно в Ω , мы можем воспользоваться доказанной теоремой и показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k^0) = \min_{\Omega} J(\cdot).$$

Приведенный здесь подход сводится к некоторой процедуре дискретизации, и некоторые конкретные численные результаты, относящиеся к ее применению, содержатся в книге Фалба [1968b]. Там же можно найти и дополнительный материал, связанный с использованием метода Ритца в задачах управления.

6 Теория автоматов с точки зрения теории управления

В главах 7—9 мы увидим, как с помощью алгебраических методов можно исследовать структуру конечных автоматов. Но прежде чем переходить к теории структур, мы в этой главе покажем, что теория автоматов и теория управления не так далеки друг от друга, как это может показаться при поверхностном изучении ¹⁾. Мы убедимся, что понятия, введенные ранее в этой книге для описания систем управления, допускают содержательное с интуитивной точки зрения определение и в рамках теории конечных систем.

6.1 Полугруппы

В третьей части этой книги рассматриваются лишь стационарные (т. е. с не зависящими от времени свойствами) системы с дискретным временем $T = \{0, 1, \dots\}$, по крайней мере если специально не отмечено, что $T = [0, \infty)$ и вещественно. Такие системы описываются следующей пятеркой (обратите внимание на изменение обозначений ²⁾):

$$S = (\Omega, Y, Q, \lambda, \delta),$$

где

Ω — множество допустимых отрезков входных воздействий;

Y — множество выходных величин;

Q — множество состояний;

$\lambda: Q \times \Omega \rightarrow Q$ — переходная функция, определяющая «следующее» состояние системы;

¹⁾ Основные результаты этой главы получены в работах Арбиба [1963, 1966].

²⁾ После написания этой части книги стала укрепляться несколько отличная система обозначений $S = (X, Y, Q, \delta, \lambda)$.

$\delta: Q \times \Omega \rightarrow Y$ — выходная функция, определяющая «следующее» выходное значение.

Эту формальную пятерку можно рассматривать как математическое описание автомата, который, находясь в момент времени t в состоянии q и получая входное воздействие ω ¹⁾ на промежутке времени от t до t_0 , в момент времени t_0 оказывается в состоянии $\lambda(q, \omega)$ и генерирует выходной сигнал $\delta(q, \omega)$.

Сформулируем теперь несколько основных определений и простых предложений, несложные доказательства которых предоставим читателю.

(1.1) Определение. Два состояния q и q' , соответствующие системам S и S' , где S и S' могут быть идентичными или нет, но имеют общие Ω и Y , называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда для любого отрезка входного воздействия $\omega|_{[t_0, t]}$ из Ω отрезок выходной величины системы S , находившейся в начальный момент времени в состоянии q , совпадает с отрезком выходной величины системы S' , находившейся в начальный момент времени в состоянии q' , т. е. если

$$q \cong q' \Leftrightarrow \delta(q; \omega|_{[t_0, t]}) = \delta'(q'; \omega|_{[t_0, t]})$$

при любых t и t_0 , $t_0 \leq t$ и любых входных последовательностях $\omega|_{[t_0, t]}$, допустимых для систем S и S' .

(1.2) Определение. Система S называется *приведенной*, если в ее пространстве состояний не существует несовпадающих состояний, эквивалентных друг другу.

(1.3) Предложение. Если состояния q и q' эквивалентны, то эквивалентны и состояния, в которые переводит системы S и S' любое входное воздействие.

(1.4) Определение. Состояние q' системы S называется *достижимым* из состояния q системы S тогда и только тогда, когда существует такой отрезок входного воздействия $\omega|_{[t_0, t]}$ из Ω , что

$$q' = \lambda(q, \omega|_{[t_0, t]}).$$

(1.5) Определение. Система S называется *сильно связной*, если каждое ее состояние достижимо из любого другого состояния.

(1.6) Определение. Системы S и S' эквивалентны, $S \equiv S'$, тогда и только тогда, когда для каждого состояния пространства состояний системы S найдется эквивалентное состояние из пространства состояний системы S' и наоборот.

¹⁾ Это воздействие удобно обозначать через $\omega|_{[t, t_0]}$.

Наши системы становятся автоматами в смысле теории автоматов после того, как мы осуществим квантование времени и договоримся изучать поведение систем в последовательные моменты времени $t = 0, 1, \dots$ какой-либо подходящим образом выбранной шкалы времени, а также потребуем, чтобы множества входных и выходных алфавитов были конечными.

Для дискретного времени множество допустимых отрезков входных воздействий становится множеством конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого конечного множества входных символов X . Это множество X , таким образом, определяет множество Ω , и поэтому обычно конечный автомат обозначают пятеркой $(X, Y, Q, \lambda, \delta)$, а не пятеркой $(\Omega, Y, Q, \lambda, \delta)$.

Нет необходимости обязательно требовать, чтобы число состояний автомата (множество Q) было тоже конечным. Если все же множество Q конечно, то соответствующая система M называется *конечным автоматом, или машиной с конечным числом состояний*. Интересным кажется вопрос о существовании конечного автомата, эквивалентного заданному.

Попытаемся теперь распространить на системы общего типа некоторые понятия, обычно встречающиеся лишь в теории автоматов, что может служить введением в полугрупповую¹⁾ теорию автоматов.

Обозначим через \hat{T} множество конечных и начинающихся с нуля промежутков времени из множества T . Другими словами, пусть

$$\begin{aligned}\{0, 1, \dots\}^\wedge &= \{\{0, 1, \dots, n\}: n = 0, 1, \dots\}, \\ [0, \infty)^\wedge &= \{\{0, a\}: a \geq 0\}.\end{aligned}$$

Вводя следующее обозначение: $[a, b) = \{t \in T: a \leq t < b\}$, имеем $[0, n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, если $T = \{0, 1, \dots\}$; при этом $[0, b)$ есть обычный полуоткрытый промежуток, если T — вещественная полуось. Тогда

$$\hat{T} = \{\{0, t\}: t \in T\}.$$

При заданных T и множестве A определим $A^{\hat{T}}$ просто как множество всевозможных функций, определенных на \hat{T} и принимающих значения из A . Если $\alpha: [0, a) \rightarrow A$ и $\beta: [0, b) \rightarrow A$, то определим

$$\alpha\beta: [0, a+b) \rightarrow A$$

¹⁾ Или, если согласиться с М. П. Шютценберже, — введением в *моноидную* теорию, поскольку у всех рассматриваемых здесь полугрупп имеются единицы, но нет топологических структур. Для нас полугруппа есть просто множество с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией $(xy)z = x(yz)$. Основные понятия теории полугрупп и дальнейшее развитие намеченных здесь идей содержатся в следующей главе.

с помощью соотношения

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & 0 \leq t < a, \\ \beta(t-a), & a \leq t < a+b. \end{cases}$$

Совершенно очевидно, что $A^{\hat{T}}$ является полугруппой относительно этой операции с нулевой функцией $\Lambda: \emptyset \rightarrow A$ в качестве единицы¹⁾. Если α определено на промежутке $[a, b)$, то мы определим «длину» α с помощью функции $l(\alpha) = b - a$.

Дальше в этом параграфе мы будем предполагать, что наше множество Ω допустимых начальных отрезков входных воздействий является *подполугруппой* X^* множества $X^{\hat{T}}$.

В том случае, когда $T = \{0, 1, \dots\}$, наша X^* есть привычная «свободная полугруппа на X », образованная конечными последовательностями элементов множества X , составленными по правилам сочленения²⁾.

Стационарная система в действительности определяется двумя функциями

$$(1.7) \quad \lambda: Q \times X^* \rightarrow Q, \quad \delta: Q \times X^* \rightarrow Y.$$

Обычно автомат задается своими переходными и выходными функциями $\lambda: Q \times X \rightarrow Q$ и $\delta: Q \times X \rightarrow Y$, но такие функции без всякого труда преобразуются к виду (1.7), и мы будем поэтому свободно пользоваться этими последними функциями.

Возвращаясь теперь к нашим стационарным системам общего вида, запишем условие согласованности отрезков входных воздействий в следующем виде:

$$\lambda(\lambda(q, x), x') = \lambda(q, xx') \quad \text{для всех } q \in Q; x, x' \in X^*.$$

Назовем отображением «вход — выход» стационарной системы S , находящейся в начальный момент времени в состоянии q , функцию

$$S_q: X^* \rightarrow Y,$$

определенную условием $S_q(x) = \delta(q, x)$ при $x \in X^*$. Пусть $L_{x'}(x) = x'x$ для всех $x', x \in X^*$. Тогда, замечая, что $\delta(q, x'x) = \delta(\lambda(q, x'), x)$, мы видим, что

$$S_{\lambda(q, x')}(x) = \delta(\lambda(q, x'), x) = \delta(q, x'x) = S_q(x'x) = S_q L_{x'}(x).$$

Таким образом, имеем

$$S_{\lambda(q, x')} = S_q L_{x'}.$$

¹⁾ Такое определение пригодно для стационарных систем. В общем случае нам пришлось бы рассматривать $\hat{T} = \{[a, b): a < b; a, b \in T\}$ и определять $\alpha\beta$ только в том случае, когда α определено на $[a, c)$, а β — на $[c, b)$ при некоторых a и b и общем c .

²⁾ Эквивалентные термины — сшивание и конкатенация. — Прим. перев.

Если мы ограничимся лишь выяснением того, как входная последовательность преобразуется в выходную, то все, что нам нужно знать о состоянии q , содержится в функции S_q . Возвращаясь к понятию эквивалентности систем, мы сформируем следующее предложение.

(1.8) **Предложение.** *Две стационарные системы S и S' с множествами состояний Q и Q' соответственно эквивалентны друг другу тогда и только тогда, когда*

$$\{S_q: q \in Q\} = \{S_{r'}: r' \in Q'\}.$$

Кроме того, очевидна справедливость и следующего предложения.

(1.9) **Предложение.** *Система S является приведенной тогда и только тогда, когда отображение $q \mapsto S_q$ взаимно однозначно.*

Система S называется системой *состояние — выход*, если найдется такая функция $i: Q \rightarrow Y$, что $\delta(q, x) = i(\lambda(q, x))$, т. е. если выходная последовательность в каждый момент времени зависит лишь от состояния системы в этом момент времени.

(1.10) **Предложение.** *Пусть $S = (X^*, Y, Q, \lambda, \delta)$. Тогда существует приведенная система «состояние — выход», эквивалентная системе S . Одна такая система S^0 называется приведенной реализацией системы S , если*

$$S^0 = (X^*, Y, Q^0, \lambda^0, i^0 \lambda^0),$$

где

$$Q^0 = \{S_q: q \in Q\},$$

$$\lambda^0(q^0, x) = q^0 L_x \text{ для } q^0 \in Q^0, x \in X^*,$$

$$i^0(q^0) = q^0(\Lambda), \text{ например, } i^0(S_q L_x) = \delta(q, x).$$

В случае конечных автоматов приведенная реализация также является конечной. Читатель, знакомый с теорией линейных систем, знает, что приведенная реализация линейной системы с пространством состояний $Q = E^n$ будет также линейной с пространством состояний E^m ($m \leq n$) (см. § 6.2).

Однако для нелинейных систем с пространством состояний E^n приведенная реализация может оказаться неинтересной, поскольку приведение может уничтожить евклидову топологию пространства. Это пессимистическая сторона вопроса. Более оптимистический взгляд состоит в том, что топология приведенного пространства состояний может дать полезную информацию о свойствах устойчивости нелинейной системы.

В заключение этого параграфа определим полугруппы системы S . Прежде всего напомним, что эквивалентность \equiv на полугруппе A называется конгруэнтностью, если

$$x \equiv y \Rightarrow xz \equiv yz, \quad x \equiv y \Rightarrow zx \equiv zy \quad \text{для всех } x, y, z \in A.$$

В этом случае можно определить факторполугруппу A/\equiv , потребовав, чтобы ее элементами служили $[x]_{\equiv}$ (классы эквивалентности относительно эквивалентности \equiv), а умножение определялось согласно соотношению $[x]_{\equiv} [y]_{\equiv} = [xy]_{\equiv}$. Для системы $S = (X^*, Y, Q, \lambda, \delta)$ определим отношение эквивалентности \equiv_s на полугруппе X^* , потребовав, чтобы $x \equiv_s x'$ тогда и только тогда, когда

$$S_q(uxv) = S_q(ux'v)$$

при всех $q \in Q$ и $u, v \in X^*$. Это отношение, очевидно, является конгруэнтностью, и поэтому мы можем определить полугруппу системы S как факторполугруппу X^*/\equiv_s .

В следующей главе мы подробно разовьем полугрупповую теорию конечных автоматов. На основе этой теории читатель может в качестве упражнения обобщить многие из соответствующих положений на случай системы общего вида.

6.2 Аддитивность и дуальность

В современной математике, начиная с простой теории матриц и кончая абстрактными банаховыми пространствами, изучению линейных задач уделяется столь большое внимание, что совсем не удивительно, если и в теории управления наиболее изученными оказались именно линейные системы. В теории управления обычно считают, что пространства X , Y и Q евклидовы, и теория линейных систем воздвигнута именно на этом основании. В настоящем параграфе мы получим некоторые из основных теоретических результатов, используя только групповое свойство соответствующих пространств.

Таким образом, за исключением материала, посвященного изучению вопроса дуальности автоматов, мы всюду будем предполагать, что X , Y и Q есть абелевы группы, и пользоваться символом «+» для обозначения групповой операции. А так как мы не хотим определять скалярное умножение, мы воспользуемся термином «аддитивность» для обозначения различных понятий, аналогичных понятию классической линейности.

(2.1) **Определение.** Состояние θ системы S называется нулевым, если при всех t имеем

$$\delta(\theta, 0^t) = 0,$$

где 0^t есть нулевое входное воздействие, $0^t: [0, t) \rightarrow Y$, удовлетворяющее соотношению $0^t(\tau) \equiv 0$.

Следующее определение играет важнейшую роль.

(2.2) **Определение.** Система S называется *аддитивной* тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

- (а) свойством декомпозиции: $\delta(q, u) = \delta(q, 0^{(u)}) + \delta(\theta, u)$;
- (б) аддитивностью в нулевом состоянии: $\delta(\theta, x - x') = \delta(\theta, x) - \delta(\theta, x')$, $l(x) = l(x')$;
- (с) аддитивностью при нулевом входном воздействии, т. е. $\delta(q' - q'', 0^t) = \delta(q', 0^t) - \delta(q'', 0^t)$.

(2.3) **Предложение.** Если $\lambda(\theta, 0^t) \equiv \theta$ при всех t и все состояния системы достижимы из состояния θ , то из свойства (б) определения (2.2) следует свойство (а).

Доказательство. Предположим, что $q = \lambda(\theta, x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(q, u) &= \delta(\lambda(\theta, x), u) = \\ &= \delta(\theta, x \cdot u) = \\ &= \delta(\theta, x \cdot 0 + 0 \cdot u) = \\ &= \delta(\theta, x \cdot 0) + \delta(\theta, 0 \cdot u) = \quad (\text{согласно (2.2) б}) \\ &= \delta(\lambda(\theta, x), 0) + \delta(\lambda(\theta, 0), u) = \\ &= \delta(q, 0) + \delta(\theta, u). \end{aligned}$$

(2.4) **Утверждение.** Если S обладает свойством декомпозиции, то состояние q' эквивалентно состоянию q'' тогда и только тогда, когда при всех $t \geq 0$ имеем

$$\delta(q', 0^t) = \delta(q'', 0^t).$$

Поскольку

$$\delta(q' - q'', x) = \delta(q' - q'', 0) + \delta(\theta, x) = \delta(q', 0) - \delta(q'', 0) + \delta(\theta, x),$$

мы видим, что два состояния эквивалентны друг другу тогда и только тогда, когда их разность эквивалентна нулевому состоянию.

(2.5) **Лемма.** Состояния, эквивалентные нулевому, образуют нормальную подгруппу N группы Q всех состояний системы.

Доказательство. Если $r, s \in N$, то и $r - s \in N$, так как при всех $x \in X^*$ имеем

$$\delta(r - s, x) = \delta(\theta, x),$$

т. е. N — некоторая подгруппа. Но поскольку группа Q абелева, подгруппа N нормальна.

(2.6) **Утверждение.** Если состояние q эквивалентно состоянию q' и $x \in X^*$, то

$$\lambda(q, x) - \lambda(q', x) \in N.$$

Таким образом, мы можем построить факторгруппу Q/N . Элементами факторгруппы Q/N являются классы эквивалентности состояний системы S . Отсюда следует, что приведенная система для системы S есть просто

$$S^0 = (X^*, Y, Q/N, \lambda^0, \delta^0),$$

где

$$\lambda^0([q], x) = [\lambda(q, x)], \quad \delta^0([q], x) = \delta(q, x).$$

(2.7) **Следствие.** Аддитивный автомат эквивалентен некоторому конечному автомату тогда и только тогда, когда факторгруппа Q/N конечна.

(2.8) **Определение.** Аддитивная система называется *вполне аддитивной*, если каждое из трех свойств из определения (2.2) сохраняется и после того, как δ заменено на λ .

(2.9) **Теорема.** Система $M = (X^*, Y, Q, \lambda, \delta)$ с множеством моментов времени

$$T = \{0, 1, 2, \dots\}$$

и структурой абелевых групп на множествах X , Y и Q является вполне аддитивной тогда и только тогда, когда существуют такие гомоморфизмы

$$\begin{aligned} A: Q &\rightarrow Q, & B: X &\rightarrow Q, \\ C: Q &\rightarrow Y, & D: X &\rightarrow Y, \end{aligned}$$

что при всех $q \in Q$ и $x \in X$ имеет место

$$\begin{aligned} \lambda(q, x) &= Aq + Bx, \\ \delta(q, x) &= Cq + Dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \lambda(q, x_1 \dots x_n) &= A^n q + \sum_{m=1}^n A^{m-1} B x_{n-m+1}, \\ \delta(q, x_1 \dots x_n) &= C A^{n-1} q + \sum_{m=1}^{n-1} C A^{m-1} B x_{n-m} + D x_n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Легко видеть, что в этом случае определение (2.2) удовлетворяется как для λ , так и для δ . Положим теперь

$$\begin{aligned} \Phi_0(n) &= C A^{n-1}, \\ h(m) &= \begin{cases} D, & m=0, \\ C A^{m-1} B, & m>0, \end{cases} \end{aligned}$$

и пусть

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= A^n, \\ h_s(m) &= A^m B. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\delta(q, x_0 x_1 \dots x_{n-1}) = \Phi_0(n) q + \sum_{m=0}^{n-1} h(m) x_{n-m},$$

$$\lambda(q, x_0 x_1 \dots x_n) = \Phi(n) q + \sum_{m=0}^{n-1} h_s(m) x_{n-m}.$$

Теперь переход от аддитивных систем к обычным линейным системам состоит в том, чтобы (1) заменить групповые гомоморфизмы гомоморфизмами векторных пространств и (2) заменить дискретное время непрерывным. Таким способом мы получим линейную систему S с пространством состояний $Q = E^n$ и множеством моментов времени $T = [0, \infty)$, описываемую уравнением

$$y(t) = \Phi_0(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t h(t - \xi) u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0,$$

где p -мерный вектор $y(t)$ описывает значение выходных величин в момент времени t ; n -мерный вектор $x(t)$ описывает состояние системы в этот же момент времени; r -мерный вектор $u(t)$ есть значение входного воздействия в тот же момент времени. Кроме того, здесь $\Phi_0(t)$ есть выходная матрица перехода системы, i -й столбец которой описывает реакцию системы S в момент времени t на нулевое внешнее воздействие при условии, что начальное состояние системы было $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (где 1 стоит на i -м месте); и наконец, $h(t)$ есть импульсная характеристика системы S , т. е. реакция системы S , находившейся в начальный момент времени в нулевом состоянии, на импульсное входное воздействие

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{дельта-функция Дирака, если } T = [0, \infty), \\ \text{символ Кронекера } \delta_{0t}, \text{ если } T = \{0, 1, \dots\}. \end{cases}$$

Если матрица $\Phi_0(t)$ дифференцируема, а h не содержит дельта-функций или их производных, то систему S можно назвать линейной дифференциальной системой. В этом случае уравнения системы S в пространстве состояний можно записать в следующей дифференциальной форме:

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(0) \dot{x}(t) + h_s(0^+) u(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

а состояние системы в момент времени t определить уравнением

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t h_s(t - \xi) u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0,$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика состояния; $\Phi(t)$ — переходная матрица системы, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(0) \Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

Уравнения динамики системы в пространстве состояний,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t h_s(t - \xi) u(\xi) d\xi, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

справедливы для любых t и t_0 при условии, что переходная матрица $\Phi(t)$ и импульсная характеристика состояния $h_s(t)$ продолжены на область отрицательных значений времени t .

Сформулируем теперь следствие, отражающее один хорошо известный факт.

(2.13) **Следствие.** Если система S описывается некоторым соотношением «вход-выход-состояние» типа (2.12) и если система приведена, то начальное состояние системы S определимо в том смысле, что при заданных $u_{(t_0, t]}$ и $y_{(t_0, t]}$ начальное состояние $x(t_0)$ определяется единственным образом.

Доказательство этого утверждения приведено в § 3.7 работы Задэ и Дезоера [1963].

Таким образом, грубо говоря, линейные дифференциальные системы обратимы.

(2.14) **Определение.** Две системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \\ \dot{y} &= -A^*(t)y, \end{aligned}$$

в которых $A^*(t)$ есть матрица комплексно-сопряженная и транспонированная относительно матрицы $A(t)$, называются взаимно сопряженными.

(2.15) **Теорема.** Пусть $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

и пусть $\Psi(t, t_0)$ — переходная матрица сопряженной системы, т. е.

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, t_0) = -A^*(t) \Psi(t, t_0), \quad \Psi(t, t_0) = I.$$

Тогда $\Psi^*(t, t_0) \Phi(t, t_0) = I$ при всех t и t_0 . Поэтому

$$(2.16) \quad \Psi^*(t, t_0) = \Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t).$$

Справедливо и обратное утверждение. Если переходные матрицы двух систем связаны между собой соотношением (2.16), то соответствующие системы являются взаимно сопряженными.

Доказательство этой теоремы дано в § 6.2 работы Задэ и Дезоера [1963].

(2.17) **Определение.** Пусть импульсная характеристика $h(t, \xi)$ линейной системы S принимает вещественные значения. Линейная система $S^{(a)}$ называется *сопряженной* по отношению к системе S , если ее импульсная характеристика $h^{(a)}(t, \xi)$ удовлетворяет соотношению

$$(2.18) \quad h^{(a)}(t, \xi) = h(\xi, t)$$

при всех t и ξ , где $h^{(a)}(t, \xi)$ описывает реакцию системы $S^{(a)}$ в момент времени t на единичный импульс, поданный на вход этой системы в момент времени ξ .

Таким образом, соотношение (2.18) утверждает, что реакция системы $S^{(a)}$ в момент времени t на единичный импульс, поданный в момент времени ξ , совпадает с реакцией системы S в момент времени ξ на единичный импульс, поданный в момент времени t .

Заметим, что в общем случае, если система S неупреждающая, то система $S^{(a)}$ должна быть упреждающей, т. е. текущее значение ее выходной величины должно зависеть от поведения входных воздействий в будущем.

Рассмотрим теперь уравнения

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

Их решение имеет следующий вид:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau,$$

и, следовательно, матричная импульсная характеристика (реакция) на входное воздействие $\delta(t - t_0)$ определяется следующим образом:

$$h(t, t_0) = C(t) \Phi(t - t_0) B(t_0).$$

Точно так же для системы

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= A^* \xi + C^* v, \\ \xi &= B^* \xi - D^* v \end{aligned}$$

с входным воздействием $\delta(t - t_0)$ матричная импульсная характеристика дается формулой

$$h^{(a)}(t, t_0) = B^*(t) \Psi(t - t_0) C^*(t_0).$$

Но тогда

$$(2.21) \quad h^{(a)}(t, t_0) = h(t_0, t)^*.$$

Примем соотношение (2.21) в качестве подходящего обобщения соотношения (2.18) на случай систем с многомерными выходными величинами и будем говорить, что система (2.20) сопряжена относительно системы (2.19) (в другом варианте нужно поменять знаки перед матрицами B^* и C^*).

В теории автоматов изучением свойств дуальности занимались мало. Единственный интересный результат можно найти в работе Рабина и Скотта [1959]. В нашем изложении мы несколько изменим их определение дуальности. Другую модификацию можно найти в работе Арбиба и Зейгера [1968].

(2.22) **Определение.** Для заданного автомата $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$, где $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$, пусть $\bar{M} = (X, \bar{Y}, \bar{Q}, \lambda^*, \delta^*)$, где \bar{Q} — множество подмножеств множества Q , а \bar{Y} — множество подмножеств множества Y . Пусть, далее,

$$\lambda^*(q^*, x) = \bigcup_{q \in q^*} \{t \in Q: \lambda(t, x) = q\},$$

$$\delta^*(q^*, x) = \bigcup_{q \in q^*} \{\delta(t, x): \lambda(t, x) = q\}.$$

Тогда система M^* , дуальная системе M , определяется как система \bar{M} , суженная на состояния, достижимые хотя бы из одного из состояний $\{q_1\}, \dots, \{q_n\}$.

В общем случае, если число состояний системы M равно n , то число состояний системы M^* порядка 2^n , так что при переходе к дуальной системе пространство состояний «расширяется». Определенный интерес представляет выяснение вопроса о том, в каком случае удастся сохранить неизменным пространство состояний, как это имеет место для линейных систем. Но состояния системы M^* есть состояния

$$\{q_1\}, \dots, \{q_n\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(q, x) = \lambda(q', x) \Rightarrow q = q' \text{ (при всех } q, q' \in Q, x \in X^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(q, x) = \lambda(q', x) \Rightarrow q = q' \text{ (при всех } q, q' \in Q, x \in X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{каждое } \lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q \text{ является перестановочным.}$$

В этом случае систему M^* можно отождествить с автоматом

$$M^R = (X, Y, Q, \lambda^R, \delta^R),$$

где $\lambda^R(q, x)$ определяет единственное q' , для которого $\lambda(q', x) = q$, а значит, и

$$\delta^R(q, x) = \delta(q', x).$$

Будем говорить тогда, что автомат M является обратимым, а автомат M^R является обратным по отношению к M . Ясно, что $(M^R)^R = M$.

(2.23) **Утверждение.** Число состояний автомата M^* равно числу состояний автомата M тогда и только тогда, когда автомат M обратим. В этом случае $M^* = M^R$.

(2.24) **Утверждение.** Если автомат M обратим и если найдется такое состояние q , что из него достигаются все состояния автомата M , то автомат M сильно связан.

Противопоставим понятию обратимости автоматов общую идею восстанавливающей системы.

(2.25) **Определение.** Системы α и β называются восстанавливающими относительно друг друга, если каждая пара вход — выход (u, y) системы α^1 такова, что пара (y, u) (y — входное воздействие, а u — выходная величина) является парой вход — выход для системы β , и наоборот.

(2.26) **Теорема.** Автомат, являющийся восстанавливающим для некоторого конечного автомата, не обязательно конечен.

Доказательство. Пусть M есть конечный автомат с m входами и n выходами, и пусть $n < m$. Тогда у автомата M возможны m^k входных последовательностей длины k и не более чем n^k выходных последовательностей той же длины.

Пара $(x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_k)$ является парой вход — выход автомата M , если найдется такое состояние q автомата M , что

$$(2.27) \quad y_n = \delta(q, x_1 \dots x_n) \quad \text{для} \quad 1 \leq n \leq k.$$

Пусть теперь автомат M_c является восстанавливающим для M (он может быть описан не полностью). Если число состояний автомата M_c конечно и равно, скажем, r , то, согласно уравнению (2.27), необходимо, чтобы $m^k \leq rn^k$, или чтобы $r \geq (m/n)^k$. Увеличивая k , мы придем к противоречию, что и доказывает теорему.

Если M^{**} представляет собой систему, двойственную некоторой системе, двойственной системе M , то, как известно, система M изоморфна либо системе M^{**} , либо некоторой подсистеме системы M^{**} . В связи с этим возникает искушение в рамках теории автоматов принять, что автомат M эквивалентен наименьшему подавтомату автомата M^{**} , состояния которого содержат $\{\{q_1\}\}, \dots, \{\{q_n\}\}$. Обозначим этот подавтомат через \tilde{M} . Однако состояние $\{q_1\}$ в общем случае не достижимо из других состояний автомата M^* .

¹) То есть найдется такое $q \in Q_a$, что $y(t) = \delta_a(q, u_{[0,t]})$.

Операция обращения необрабатываемых автоматов в общем случае каждый раз вызывает увеличение мощности пространства состояний. А это значит, что в общем случае $\lambda^{**}(\{\{q_i\}\}, x) = \emptyset$, что не представляет для нас никакого интереса. Для того чтобы убедиться в этом, приведем следующий расчет:

$$\lambda^{**}(R, x) = \bigcup_{T \subseteq R} \{Q' \subseteq Q: \lambda^*(Q', x) = T\},$$

где

$$\lambda^*(Q', x) = \bigcup_{q' \in Q'} \{q \in Q: \lambda(q, x) = q'\}.$$

Если $R = \{\{q_i\}\}$, то

$$\lambda^{**}(R, x) = \{Q' \subseteq Q: \lambda^*(Q', x) = \{q_i\}\}.$$

Но чтобы выполнялось соотношение

$$\{q_i\} = \bigcup_{q' \in Q'} \{q \in Q: \lambda(q, x) = q'\},$$

необходимо и достаточно иметь $Q' = \{\lambda(q_i, x_i)\}$ и $\lambda(q, x) = \lambda(q_i, x) \Rightarrow q = q_i$. Это приводит нас к следующему результату.

(2.28) *Теорема. Автомат M изоморфен подавтомату \tilde{M} автомата M^{**} тогда и только тогда, когда автомат M обратим.*

6.3 Управляемость и наблюдаемость

В гл. 2 мы видели, как вводятся понятия управляемости и наблюдаемости для линейных дифференциальных систем S , описываемых уравнениями типа

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

где A , B , C и D — соответственно матрицы размера $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$ и $p \times r$; кроме того, здесь n -мерный вектор x описывает состояние системы; r -мерный вектор u описывает входное воздействие, а p -мерный вектор y дает выходную величину системы S .

Попытаемся перенести как можно больше из этой теории на случай общих систем (и, в частности, автоматов). При этом оказывается, что для получения многих результатов требуются лишь наши условия аддитивности, а не условия линейности, используемые обычно.

Будем говорить, что состояние q управляемо, если можно найти такое входное воздействие, которое переведет систему из состояния q в нулевое состояние. Другими словами, для любой системы S с от-

меченным состоянием θ введем следующее формальное определение.

(3.2) Определение. Состояние q системы S управляемо тогда и только тогда, когда существует такое $u \in X^*$, что

$$\lambda(q; u) = \theta.$$

Система S называется управляемой тогда и только тогда, когда управляемо каждое ее состояние.

(3.3) Утверждение. Если S есть система, каждое состояние которой достижимо из θ , то из управляемости системы S следует, что эта система сильно связна; справедливо и обратное.

Вернемся теперь к уравнениям (2.10) аддитивной системы M . Эта система обратима (см. (2.21)), если при каждом x обратимо отображение $\lambda(\cdot, x)$, иначе говоря, если для каждого $r \in Q$ существует единственное решение уравнения

$$Aq = r - Bx,$$

т. е. тогда и только тогда, когда A есть некоторый автоморфизм множества Q с обратным, обозначенным, скажем, через A^{-1} . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\lambda^R(r, x) &= A^{-1}r - A^{-1}Bx, \\ \delta^R(r, x) &= \delta(\lambda^R(r, x), x) = \\ &= C[A^{-1}(r - Bx)] + Dx = \\ &= CA^{-1}r + [D - CA^{-1}B]x.\end{aligned}$$

Тогда система $M^R = (X, Y, Q, \lambda^R, \delta^R)$ является также вполне линейной. Заметим, что действительно $M^{RR} = M$, поскольку

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad CA^{-1}AA^{-1}B - CA^{-1}B + D = D \text{ и т. д.}$$

Но наше утверждение (3.3) гласит, что обратимый автомат M управляем тогда и только тогда, когда все его состояния можно достичь из нулевого состояния. Воспользовавшись уравнениями (2.11), мы сразу получим следующий результат.

(3.4) Теорема. Обратимая вполне аддитивная система управляема тогда и только тогда, когда каждое состояние q можно представить в виде некоторой линейной комбинации вида

$$A^{m-1}Bx, \quad x \in I.$$

Возвращаясь теперь к системе (3.1) и вспоминая, что n -ю степень A^n произвольной матрицы размера $n \times n$ можно представить

как линейную комбинацию $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$, мы увидим, что нами доказана «в основных чертах» теорема (3.4) из гл. 2.

(3.5) **Теорема.** Система (3.1) управляема тогда и только тогда, когда на вектор-столбцы матрицы

$$[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

натягивается пространство состояний этой системы S .

Другим центральным понятием является понятие наблюдаемости. В случае линейных систем мы увидим, что это понятие дуально понятию управляемости. На самом же деле простота этого понятия в рамках теории линейных систем привела к тому, что большинство специалистов по теории систем не заметили тех сложностей, которые связаны с этим понятием в применении к нелинейным системам и которые были изучены специалистами по теории автоматов.

Будем говорить, что некоторое состояние системы *наблюдаемо*, если его можно определить, наблюдая поведение входного воздействия и выходной величины системы. Однако слова «наблюдение входного воздействия и выходных величин» можно понимать совершенно по-разному. Обратимся к следующему определению.

(3.6) Определение.

(а) (Обычным) *простым экспериментом* называется некоторая пара вход — выход $(x_{[t_0, t]}, y_{[t_0, t]})$. Другими словами, мы подаем на вход системы, находящейся в неизвестном состоянии, входное воздействие $x_{[t_0, t]}$ и наблюдаем выходную величину системы $y_{[t_0, t]}$.

(б) *Ветвящимся простым экспериментом* называется пара вход — выход $(x_{[t_0, t]}, y_{[t_0, t]})$, для которой при $t_0 < t' < t$ справедливо $x(t') = f(x_{[t_0, t']}, y_{[t_0, t']})$.

В определениях (с) и (d) каждая из N реализаций начинается с одного и того же состояния, хотя это состояние может быть и неизвестным.

(с) (Обычный) *множественный эксперимент кратности N* состоит из N пар вход — выход $(x_{i[t_0, t]}, y_{i[t_0, t]})$, $1 \leq i \leq N$. Другими словами, мы подаем $x_{i[t_0, t]}$ на вход i -й реализации среди N реализаций системы и наблюдаем ее выходную величину $y_{i[t_0, t]}$.

(d) *Ветвящимся множественным экспериментом кратности N* называется совокупность из N пар вход — выход $(x_{i[t_0, t]}, y_{i[t_0, t]})$, $1 \leq i \leq N$, где для $t_0 < t' < t$ справедливо

$$\begin{bmatrix} x_{1(t')} \\ \vdots \\ x_{N(t')} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} x_{1[t_0, t']} & y_{1[t_0, t']} \\ \vdots & \vdots \\ x_{N[t_0, t']} & y_{N[t_0, t']} \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом можно определить *бесконечные эксперименты*. Во всех случаях разность $t - t_0$ называется *длиной эксперимента*.

(3.7) **Определение.** Две системы S_1 и S_2 называются *примитивно эквивалентными*, если не существует простого эксперимента, разделяющего их, т. е. если для любых q_1 и любых $x_{[t_0, t]}$ найдется такое q_2 , что

$$\delta_1(q_1, x_{[t_0, t]}) = \delta_2(q_2, x_{[t_0, t]})$$

и наоборот.

(3.8) **Определение.** Системы S_1 и S_2 называются *сложно эквивалентными*, если их невозможно разделить с помощью любого множественного эксперимента, т. е. тогда и только тогда, когда каждое состояние системы S_1 эквивалентно некоторому состоянию системы S_2 , и наоборот.

(3.9) **Теорема.** Если системы S_1 и S_2 примитивно эквивалентны и сильно связны, то они сложно эквивалентны.

Доказательство этой теоремы можно найти на стр. 28—30 книги Гинзбурга [1962], содержащей исчерпывающее исследование этого понятия эксперимента в рамках теории автоматов.

(3.10) **Определение.** Система S называется *определимой в узком (широком) смысле*, если независимо от характера начального состояния q_0 экспериментатор может установить вид q_0 по любому (некоторому) эксперименту на системе S , находившейся в состоянии q_0 .

Читатель может проверить свое понимание этого понятия, попытавшись (непосредственно) доказать следующую теорему.

(3.11) **Теорема.** Система является приведенной тогда и только тогда, когда она определима с помощью некоторого бесконечного множественного эксперимента.

Ясно, что система может быть определимой с помощью эксперимента любого типа только в том случае, когда она является приведенной. Однако приведенная нелинейная система может быть неопределимой с помощью обычного простого эксперимента. Согласно Гинзбургу [1962], для системы (n, m, p) , т. е. для системы с n состояниями, m входами и p выходами, справедлива следующая теорема.

(3.12) **Теорема.** Начальное состояние приведенной системы (n, m, p) можно определить с помощью некоторого множественного эксперимента длины, не большей $(n - 1)$, и кратности, не большей $(n - 1)$.

Дадим еще две новые теоремы и одно следствие, доказанные Форром [1965].

(3.13) Теорема. *Каждый вывод относительно обратимой системы, который может быть сделан на основании некоторого множественного эксперимента, можно получить из некоторого простого эксперимента.*

Доказательство. Пусть наши эксперименты проводятся последовательно. После j -го эксперимента на вход автомата подается «обращение» j -й входной последовательности, возвращая таким образом систему S в начальное состояние, после чего можно начинать $(j + 1)$ -й эксперимент. Теорема доказана.

На основании теоремы (3.12) и доказательства теоремы (3.13) приходим к следствию.

(3.14) Следствие. *Каждая обратимая система (n, t, p) определима с помощью простого эксперимента, имеющего длину меньше $(n - 1)(2n - 3)$.*

(3.15) Теорема. *Аддитивная система с дискретным временем определима тогда и только тогда, когда она является приведенной. Если пространство состояний Q этой системы является n -мерным векторным пространством, то начальное состояние системы можно определить с помощью любого простого эксперимента длины n .*

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой с использованием уравнений (2.10) и (2.11). Доказательство второго утверждения теоремы опирается на то, что произвольная степень любого линейного преобразования A пространства размерности n является некоторой линейной комбинацией преобразований A^0, A^1, \dots, A^{n-1} .

Введем теперь следующее определение.

(3.16) Определение. Система S называется *наблюдаемой* тогда и только тогда, когда она является приведенной.

Смысл этого определения заключается в том, что для наших аддитивных (линейных) систем оно эквивалентно определимости начального состояния *любого* вида. Однако для нелинейных систем существует много неэквивалентных понятий определимости начального состояния, так что специалист по теории нелинейных систем должен быть готов к тому, чтобы исследовать разные виды наблюдаемости. Вербеек в устном сообщении привел следующий пример (рис. 6.1) конечного автомата, который является приведенным, но начальное состояние которого *не может быть* определено с помощью простого эксперимента.

Этот автомат имеет

входной алфавит $X = \{a, b\}$,

выходной алфавит $Y = \{0, 1\}$,

множество состояний $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$.

Входная последовательность, начинающаяся с a , не позволит разделить состояния q_1 и q_3 , а последовательность, начинающаяся с b , не позволит разделить состояния q_1 и q_2 . Поэтому никакой простой эксперимент не гарантирует нам, что система находилась в состоянии q_1 (если так и было на самом деле!), в то время как множественный эксперимент кратности 2 позволит выяснить это.

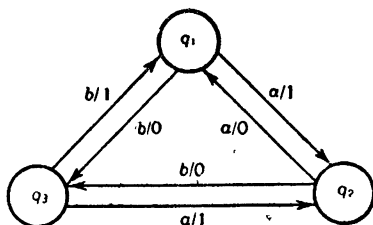


Рис. 6.1.

Теперь мы знаем, что наша вполне аддитивная система (2.10) является приведенной только тогда, когда $N = \{0\}$, т. е. когда нулевое состояние эквивалентно лишь самому себе. Но тогда непосредственно из уравнений (2.11) получается следующий результат.

(3.17) Теорема. *Вполне аддитивная система S наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$CA^{k-1}q = 0 \quad \text{для всех} \quad k \Rightarrow q = 0.$$

А отсюда мы сразу получим знакомое утверждение из гл. 2.

(3.18) Следствие. *Система S , описываемая уравнениями (3.1), наблюдаема тогда и только тогда, когда пространство состояний системы S натягивается на вектор-столбцы матрицы*

$$[C^*, A^*C^*, \dots, A^{*(n-1)}C^*].$$

Объединяя теорему (3.5) и следствие (3.18), мы получаем следующую теорему Калмана [1962] о дуальности.

(3.19) Теорема. *Пусть Σ есть система, дуальная системе S , описываемой уравнениями (3.1). Она описывается уравнениями*

$$\dot{\xi} = -A^*\xi + C^*v,$$

$$\eta = B^*\xi - D^*v,$$

где ξ есть n -мерный вектор состояния, γ есть p -мерное выходное воздействие, а η есть r -мерная выходная величина. Тогда система S управляема в том и только том случае, когда система Σ наблюдаема, и наоборот.

Вспоминая наши замечания о приведенных аддитивных системах, мы получим еще одну теорему.

(3.20) Теорема. Аддитивную систему с группой состояний Q и подгруппой N состояний, эквивалентных нулевому состоянию, можно разбить на две подсистемы S_1 и S_2 , из которых S_1 наблюдаема, а S_2 ненаблюдаема, тогда и только тогда, когда

$$Q = N \times Q/N,$$

т. е. когда декомпозиция Q через N расщепляет Q .

Отметим, что мы использовали здесь лишь условия (а) и (б) из определения аддитивной системы (2.2). В случае же линейной системы множество Q становится линейным векторным пространством, N — его подпространством, а в этом случае приведенная декомпозиция всегда расщепляется.

6.4 Толерантные автоматы

Каждый раз, когда речь заходит об использовании понятия непрерывности, специалист по теории автоматов начинает испытывать острую зависть к специалисту по теории управления. В связи с этим возникает следующая задача: «Как определить содержательную топологию на дискретном множестве, отличную от дискретной топологии?» Для тех ученых, которые используют конечные автоматы в виде нервных сетей с целью построения грубых моделей мозга, может оказаться интересным такой вопрос: «Каково должно быть определение непрерывности, чтобы она естественно присутствовала в поведении конечных автоматов?» В ответ на эти вопросы автор [1966] предложил идею толерантных автоматов. В ее основу кладется попытка своеобразного определения понятия «непрерывности» в пространстве состояний. Теория толерантных автоматов получила дальнейшее развитие в другой работе автора [1967].

Толерантность и непрерывность. Основным понятием является понятие толерантности, введенное Зеemanом [1962].

(4.1) Определение. Толерантностью ξ на множестве X называется всякое отношение, определенное на X и являющееся рефлексивным и симметричным. Толерантным пространством (X, ξ) называется множество вместе с определенной на нем некоторой толерантностью.

(4.2) **Пример.** Пусть X есть евклидова плоскость. Тогда толерантностью ξ могут быть любые пары точек, находящиеся друг от друга на расстоянии, не большем ε .

(4.3) **Пример.** Пусть X есть зрительное поле глаза. Тогда толерантностью ξ может быть острота зрения, т. е. условия того, что любые пары точек неразличимы для глаза.

Разовьем теперь эти понятия. В духе теории автоматов предположим, что время дискретно, $T = \{0, 1, \dots\}$. Пусть (X, ξ) есть некое толерантное пространство.

(4.4) **Определение.** Назовем движением (траекторией) в X некоторую функцию $m: T \rightarrow X$, а положением точки (выполняющей движение m) в момент времени t — значение этой функции $m(t)$. Тогда рассматриваемое движение m называется ξ -непрерывным, если $[m(t), m(t+1)] \in \xi$ при любых t . Другими словами, ξ -непрерывность требует отсутствия «различных скачков траектории движения».

Очевидно, что это определение ведет к интуитивно оправданному понятию непрерывности для дискретного автомата M при условии, что множество входных воздействий автомата M представляет собой совокупность L_X подмножеств некоторого толерантного пространства (X, ξ) . В этом случае мы можем представлять себе автомат M , например, в виде сетчатой оболочки глаза, на которой каждой точке множества X соответствует один рецептор. Для такого автомата входное воздействие состоит в стимуляции некоторых рецепторов. Толерантность удобно определить и на T , воспользовавшись понятием «соседства», т. е. потребовав, чтобы $(x, y) \in \xi$ тогда и только тогда, когда $|x - y| \leq 1$.

Пусть теперь $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ есть некоторый автомат. Поставим в соответствие каждой входной последовательности $u = (u_1, u_2, \dots) \in X^\omega$ некоторое движение $m_u: T \rightarrow Q$, где

$$m_u(0) = q_0 \text{ (начальное состояние из } Q),$$

$$m_u(t+1) = \lambda(m_u(t), u_t).$$

Определим на Q некоторую толерантность ξ . Будем называть автомат M толерантным, если каждое движение m_u является ξ -непрерывным при любых $u \in X^\omega$.

Если выбрать в качестве ξ тривиальную толерантность $e = Q \times Q$, то любой автомат окажется e -толерантным. Таким образом, следующие ниже теоремы справедливы для всех автоматов, но часто оказываются бессодержательными, если единственная возможная толерантность является тривиальной.

В дальнейшем символом ξ , снабженным в случае необходимости отличительным индексом, всегда обозначается некоторая толерантность.

(4.5) **Определение.** Пусть $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ есть автомат, для которого Q есть некоторое толерантное пространство. Автомат M называется *толерантным*, если для каждого $x \in X$ и $q \in Q$ справедливо соотношение $(q, \lambda(q, x)) \in \xi_Q$.

Таким образом, толерантные автоматы обладают *инерцией*. Неожиданное изменение входного воздействия не может вызвать резкого изменения состояния автомата.

(4.6) **Пример.** Рассмотрим обычную вычислительную машину M , для которой состояние машины определяется содержанием ее регистров. Если два состояния связаны отношением толерантности, когда они различаются содержанием некоторого ограниченного числа регистров, то M представляет собой толерантный автомат. (Отметим, что в отсутствие входных воздействий, поступающих от «внешней фазы», в качестве входных воздействий приходится рассматривать синхронизирующий импульсы датчик времени.)

(4.7) **Определение.** Пусть X и Y есть некоторые толерантные пространства. Функция $f: X \rightarrow Y$ называется ξ -непрерывной, если $(x_1, x_2) \in \xi_X \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in \xi_Y$.

Напомним, что $(x_1, x_2) \in \xi^2$, если существует такое x , что $(x_1, x) \in \xi$ и $(x, x_2) \in \xi$. Аналогичные соотношения справедливы и для ξ^n .

(4.8) **Определение.** Функция $f: X \rightarrow Y$ называется n -непрерывной, если $(x_1, x_2) \in \xi_X \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in \xi_Y^n$.

(4.9) **Определение.** Пусть $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ есть некоторый толерантный автомат. Тогда автомат M называется n -толерантным, если функция $\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$ является n -непрерывной при каждом $x \in X$.

(4.10) **Теорема.** Каждый толерантный автомат является 3-толерантным автоматом.

Доказательство. Имеем $(q, \lambda(q, x)) \in \xi_Q$, $(q', \lambda(q', x')) \in \xi_Q$, а поэтому, если $(q, q') \in \xi_Q$, то $(\lambda(q, x), \lambda(q', x')) \in \xi_Q^3$.

(4.11) **Теорема.** Пусть M есть некоторый 1-толерантный автомат. Тогда функция

$$\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$$

является ξ_Q -непрерывной при каждом $x \in X^*$.

Доказательство. По определению 1-толерантного автомата функция $\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$ является 1-непрерывной при любых $x \in X$. Но $\lambda(\cdot, xy) = \lambda(\lambda(\cdot, x), y)$. Отсюда требуемые результаты получаются сразу по индукции, так как если f и g являются ξ -непрерывными, то этим свойством обладает и их композиция.

Таким образом, 1-толерантные автоматы обладают свойством *устойчивости*, чего нельзя сказать о толерантных автоматах общего вида. Другими словами, у 1-толерантных автоматов небольшие различия в начальных состояниях не могут привести к значительным различиям в состоянии в будущем. Поэтому каждое отображение $\lambda(\cdot, x) : Q \rightarrow Q$ в определенном смысле является сжимающим, что сразу становится понятным, если определить метрику на Q следующим образом:

$$d(x, x') = \min \{n : (x, x') \in \xi^n\}.$$

Выходная толерантность. Если подходить к автоматам с точки зрения теории «черного ящика», т. е. уделять основное внимание поведению входных воздействий и выходных величин, а не изменению состояний, то имеет смысл ввести новые понятия, связанные с толерантностью и устанавливающие соответствие между «незначительными изменениями» входных воздействий с «незначительными изменениями» выходных величин. Поэтому приведем еще несколько определений.

(4.12) **Определение.** Пусть $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ есть автомат, для которого множество входных последовательностей является толерантным пространством (X^*, ξ_{X^*}) , а множество выходных последовательностей есть толерантное пространство $[Y^*, \xi_{Y^*}]$. Тогда автомат M называется *внешне толерантным*, если при любых состояниях $q \in Q$ и $x, x' \in X^*$ имеет место соотношение

$$(x, x') \in \xi_{X^*}^* \Rightarrow (\delta(q, x), \delta(q, x')) \in \xi_{Y^*}.$$

Часто особенно интересным оказывается случай, в котором толерантность ξ_{X^*} индуцируется непосредственно толерантностью ξ_X , определенной на X .

(4.13) **Определение.** Пусть (A, ξ) есть некоторое толерантное пространство. Тогда толерантное пространство (A^*, ξ^*) называется *индуцированным толерантностью ξ* , если $a, a' \in A^*$ связаны между собой отношением ξ^* тогда и только тогда, когда

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad a' = (a'_1, \dots, a'_n)$$

удовлетворяют условиям

$$n = n' \text{ и } (a_1, a'_1) \in \xi, \dots, (a_n, a'_n) \in \xi.$$

Обозначим через $LP(X, Y)$ множество функций из X^* в Y^* , сохраняющих длину последовательности. Тогда ξ_X и ξ_Y индуцируют естественное подмножество множества $LP(X, Y)$, образованное функциями, непрерывными относительно ξ_X^* и ξ_Y^* :

$$f \in LP_{\xi}(X, Y) \Leftrightarrow (x, x') \in \xi_{X^*}^* \Rightarrow (f(x), f(x')) \in \xi_{Y^*}^*.$$

Таким образом, ясно, что автомат M оказывается внешне толерантным тогда и только тогда, когда $M_q \in LP_{\xi}(X, Y)$.

На множестве $LP(X, Y)$ можно определить естественную толерантность

$$(f, f') \in \xi_{LP} \Leftrightarrow (f(x), f'(x)) \in \xi_Y^* \text{ для всех } x \in X^*.$$

Будем говорить, что автомат M является *естественно толерантным* (по отношению к входной толерантности ξ_X и выходной толерантности ξ_Y), если для каждого $q \in Q$ и каждого $x \in X$ имеет место

$$(M_q, M_q L_x) \in \xi_{LP}.$$

Толерантность $\tilde{\xi}$ на X можно определить также, основываясь на толерантности ξ_Y , определенной на Y . В этом случае

$$(x, x') \in \tilde{\xi} \Leftrightarrow (\delta(q, x) \delta(q, x')) \in \xi_Y \text{ для всех } q \in Q.$$

Заметим, что обычно от толерантности на X^* (или Y^*) требуется правая инвариантность, т. е. чтобы имело место соотношение

$$(x, x') \in \xi_{X^*} \text{ и } x'' \in X^* \Rightarrow (xx'', x'x'') \in \xi_{X^*}.$$

Любые толерантности, введенные в явном виде выше, обладают этим свойством. В действительности же они обладают даже более сильным свойством:

$$(x, x') \in \xi_{X^*} \text{ и } (x'', x''') \in \xi_{X^*} \Rightarrow (xx'', x'x''') \in \xi_{X^*}.$$

Границы и оптимальность

(4.14) **Определение.** Пространство C называется *платежным*, если

- (а) C есть толерантное пространство с толерантностью ξ ;
- (б) C есть абелева группа с групповой операцией, обозначаемой символом $+$, частично упорядоченная отношением \leq ;
- (с) для каждого $c \in C$ найдутся такие $a, b \in C$, что отношения $a < c < b$ и $a < c' < b$ гарантируют, что $(c, c') \in \xi$.

На самом же деле мы обычно представляем себе платежное пространство как множество вещественных чисел с определенной на нем толерантностью $(c, c') \in \xi \Leftrightarrow |c - c'| < \varepsilon$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$.

Для заданного автомата $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ и заданного платежного пространства C платежной функцией M называют некоторую функцию $p: Q \times X \rightarrow C$. Продолжим p на множество $Q \times X^*$, потребовав, чтобы

$$p(q, xy) = p(q, x) + p(\lambda(q, x), y).$$

Тогда задачу оптимального управления автоматом можно сформулировать следующим образом.

(4.15) **Задача оптимального управления.** Пусть q_0 и q_1 есть два состояния из Q , называемые соответственно начальным и конечным. Будем говорить, что $u = (u_1, \dots, u_n) \in X^*$ переводит M из состояния q_0 в состояние q_1 , если

$$\lambda(q_0, u) = q_1,$$

и в то же время

$$\lambda(q_0, u_1, \dots, u_k) \neq q_1$$

при всех $k < n$. Требуется среди всех последовательностей u из X^* , переводящих M из q_0 в q_1 , найти такую, для которой $p(q_0, u)$ минимально¹⁾.

Пусть $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ есть некоторый автомат с платежной функцией p и платежным пространством C . Определим тогда (обычно бесконечный) автомат

$$(M, p) = (X, Y, Q \times C, \lambda_p, \delta_p)$$

следующим образом:

$$\lambda_p(q, c, x) = (\lambda(q, x), c + p(q, x)),$$

$$\delta_p(q, c, x) = \delta(q, x).$$

Пусть достижимым в $Q \times C \times T$ множеством R_{q_0} называется

$$\{(\lambda_p(q_0, 0, u), l(u)): u \in X^*\},$$

где $\lambda_p(q_0, 0, \Lambda) = (q_0, 0)$, а Λ есть пустая последовательность.

(4.16) **Определение.** Пусть X и Y есть некоторые толерантные пространства. Тогда толерантным произведением этих пространств называется декартово произведение $X \times Y$, наделенное толерантностью

$$((x, y), (x', y')) \in \xi \Leftrightarrow (x, x') \in \xi_X, (y, y') \in \xi_Y.$$

Пусть теперь M есть 1-толерантный автомат, и пусть $Q \times C$ рассматривается как толерантное произведение пространств Q и C . Для каждого n рассмотрим сечение множества R_{q_0} в момент времени n :

$$R_{q_0}^n = \{\lambda_p(q_0, 0, u): u \in X^n\} \subseteq Q \times C.$$

Если последовательность u оптимальна, то ей соответствует минимальная проекция на C по сравнению с любыми другими точками сечения $R_{q_0}^n$, и, следовательно, необходимое условие оптимальности управления u состоит в том, чтобы $\lambda_p(q_0, 0, u)$ определяло точку на границе множества R_{q_0} .

¹⁾ Более точная формулировка требует попадания из состояния q_0 в состояние, толерантное состоянию q_1 . Приведенная формулировка может рассматриваться лишь в качестве пробной.

(4.17) **Теорема.** Для каждого состояния q 1-толерантного автомата M и каждого $n \in T$ множество $R_{q_0}^n$ связно относительно ξ_Q^2 ¹⁾.

Доказательство. Пусть $q_1, q_2 \in R_{q_0}^n$. Тогда найдутся такие $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ из X^n , что $\lambda(q, x) = q_1$ и $\lambda(q, x') = q_2$. Пусть

$$\rho(m) = \lambda(q, x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n);$$

тогда $\rho(0) = q_1$, $\rho(n) = q_2$ и $(\rho(m), \rho(m+1)) \in \xi_Q^2$. Доказательство окончено.

Теперь нам придется сделать маленькое отступление и сформулировать понятие «границы» в терминах толерантных, а не топологических пространств. По аналогии с обычными топологическими определениями введем следующие определения.

(4.18) **Определение.** Пусть S есть некоторое подмножество толерантного пространства X . Тогда назовем

ξ -замыканием подмножества S множество $\bar{S} = \{x: (x, y) \in \xi \text{ для некоторого } y \in S\}$;

ξ -внутренностью подмножества S множество $\text{int } S = \{x: (x, y) \in \xi \Rightarrow y \in S\}$;

ξ -границей подмножества S множество $\delta S = \bar{S} - \text{int } S = \{x: (x, y) \in \xi \text{ для некоторого } y \in S, \text{ но } (x, z) \notin \xi \text{ для некоторого } z \notin S\}$.

(4.19) **Лемма.** $X - \bar{S} = \text{int}(X - S)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} x \in X - \bar{S} &\Leftrightarrow (x, y) \in \xi \Rightarrow y \notin S \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \text{int}(X - S). \end{aligned}$$

Таким образом, в действительности из определения (4.14с) следует, что если u оптимально, то $\lambda_p(q_0, 0, u) \in \delta R_{q_0}^n$.

(4.20) **Теорема.** Пусть M есть 1-толерантный автомат, и пусть $u = (u_1, \dots, u_n) \in X^n$. Если $\lambda_p(q, u) \in \delta R_q^n$, то

$$(q_k, c_k) = \lambda_p(q, 0, u_1, \dots, u_k) \in \delta R_q^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Доказательство. Предположим, что существует некоторое $k < n$, такое, что $(q_k, c_k) \in \text{int } R_q^k$, и в то же время $(q_{k+1}, c_{k+1}) \in \delta R_q^{k+1}$. Но тогда $(q_k, c') \in R_q^k$ при некотором $c' < c_k$. Пусть $(q_k, c') = \lambda_p(q, v)$, $v \in X^k$. Но тогда $\lambda_p(q, v u_{k+1}) = (\lambda(q_k, u_{k+1}), c' + c(q_k, u_{k+1}))$, что противоречит предположению об оптимальности u . Теорема доказана.

Специалист по теории управления легко узнает в этой теореме аналог теоремы, на которой базируется принцип максимума Понтрягина теории оптимальных систем.

¹⁾ Это улучшение результата Арбиба [1966], доказавшего связность относительно ξ_Q^4 , принадлежит Вербеку (личное сообщение автору).

7 Основные понятия теории автоматов и теории полугрупп

Следующие три главы посвящены проблеме структуры дискретных систем, которые принято называть автоматами. А так как в связи с этим мы отходим от понятий математического анализа, с которыми многие наши читатели достаточно хорошо знакомы, и начинаем использовать понятия современной алгебры, не столь знакомые рядовому читателю, в следующем параграфе мы с разумной степенью детализации заложим алгебраические основы, необходимые для понимания последующего материала.

Нам хочется разобраться, каким образом можно осуществлять декомпозицию автоматов на более простые автоматы, соединенные друг с другом последовательно или параллельно. Для этого каждому автомату ставится в соответствие некоторая полугруппа. Затем выясняется, что каждый автомат можно разбить на более простые автоматы, если только исходный автомат не представляет собой триггер или простую группу его полугруппы. Верно и обратное: любую разложимую машину M можно построить в виде соединенных друг с другом триггеров или автоматов простых групп, где искомые простые группы связаны с полугруппой машины M таким известным алгебраическим свойством, как *делимость*.

7.1 Полугруппы и конгруэнтность

В этом параграфе дается математический язык, на котором будет излагаться структурная теория автоматов. Читатель, не знакомый с затрагиваемыми вопросами, должен тщательно изучить материал данного параграфа, чтобы прочно усвоить вводимые здесь понятия, и лишь после этого он может переходить к дальнейшему изучению¹⁾.

Прежде всего напомним сравнительно знакомое понятие группы.

(1.1) **Определение.** Группой называется множество G с заданной на нем бинарной операцией $m: G \times G \rightarrow G$ (вместо $m(a, b)$ обычно пишут ab) при условии, что

(а) операция m ассоциативна, т. е. для любых $a, b, c \in G$ справедливо

$$(ab)c = a(bc);$$

¹⁾ Приводимый ниже материал имеется, например, в монографиях Клиффорда и Престона [1961] и Ху Сы-цзяна [1965].

(b) на множестве G определена единица e , т. е. существует такое $e \in G$, что

$$ae = ea = a \quad \text{для любых } a \in G;$$

(c) для каждого элемента $a \in G$ существует обратный ему $a^{-1} \in G$, т. е. для любых $a \in G$ найдется такое $a^{-1} \in G$, что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Рассмотрим, например, множество целых чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ с определенной на нем операцией сложения. Это есть группа, так как

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Однако целые числа не образуют группы относительно умножения, так как, хотя

$$(ab)c = a(bc),$$

$$a1 = 1a = a,$$

обратные элементы не являются целыми, за исключением случая $a = \pm 1$.

(1.2) **Замечание.** Бинарная операция $m(a, b)$ называется коммутативной, если $m(a, b) = m(b, a)$ при любых a и b . Группа называется абелевой или коммутативной, если коммутативна ее групповая операция.

Возможно, простейшим примером неассоциативной операции может служить вычитание

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c.$$

Мы не станем заниматься здесь неассоциативными операциями, но нас будут интересовать операции, для которых не обязательно существование обратных. Это подводит нас к понятию полугруппы, которая может и не обладать всеми свойствами группы.

(1.3) **Определение.** Полугруппой называется множество S с определенной на нем бинарной операцией $m: S \times S \rightarrow S$ (обычно вместо $m(a, b)$ пишут $a \cdot b$) при условии, что

(a) операция m ассоциативна, т. е. для всех $a, b, c \in S$ справедливо

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Если в S имеется единица, т. е. такой элемент e , что

$$e \cdot s = s \cdot e = s,$$

то полугруппу S иногда называют моноидом.

Таким образом, каждая группа является и полугруппой, но обратное не верно, так как множество целых чисел образует моноид относительно умножения (с единицей 1), но *не является* группой. Целые числа, *большие* 1, образуют полугруппу и уже *не являются* моноидом.

(1.4) **Определение.** Подполугруппой полугруппы S называется некоторое подмножество $S' \subseteq S$, замкнутое относительно умножения (полугрупповой операции):

$$s_1, s_2 \in S' \Rightarrow s_1 \cdot s_2 \in S'.$$

Рассмотрим некоторое конечное множество Σ символов. Обозначим через Σ^* множество всевозможных конечных последовательностей

$$\sigma_1 \dots \sigma_n,$$

где каждое $\sigma_i \in \Sigma$. Пусть Λ означает пустую последовательность, для которой $n = 0$, и пусть $\Lambda \in \Sigma^*$. Определим бинарную операцию m на Σ^* как операцию сшивания, сочленения или приписывания:

$$m(\sigma_1 \dots \sigma_n, \tau_1 \dots \tau_m) = \sigma_1 \dots \sigma_n \tau_1 \dots \tau_m.$$

Обозначим $m(x, y)$ через xy . Совершенно ясно, что $(xy)z = x(yz)$. Ясно также, что Λ может служить единицей, так как $\Lambda x = x\Lambda = x$, так что Σ^* является моноидом. Если $x = \sigma_1 \dots \sigma_n$, то n называется длиной последовательности σ и обозначается через $l(\sigma)$. Тогда $l(\Lambda) = 0$ и $l(x, y) = l(x) + l(y)$ так же, как у логарифмической функции.

Будем называть множество Σ^* вместе с операцией сшивания *свободным*¹⁾ *моноидом, индуцируемым множеством* Σ .

Пусть X есть произвольное множество, и пусть f есть некоторое отображение множества X в себя. Мы будем называть его *преобразованием* множества X . Если приписывать символ функции слева от аргумента, то совокупность таких преобразований становится полугруппой $F_L(X)$ относительно закона композиции $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Если же приписывать символ функции справа от аргумента, то это множество становится полугруппой $F_R(X)$ относительно закона композиции $(x)(f \circ g) = [(x)f]g$. Таким образом, при переходе от $F_L(X)$ к $F_R(X)$ приходится изменять порядок композиции.

(1.5) **Определение.** Гомоморфизмом некоторой полугруппы S_1 в другую полугруппу S_2 называется любое преобразование $p: S_1 \rightarrow$

¹⁾ Прилагательное «свободный» в данном контексте означает по сути дела, что элементы моноида свободны от каких-либо ограничений, кроме тех, которые накладываются ассоциативностью. Ни одна конечная полугруппа, содержащая более одного элемента, не является свободной. Для наших целей достаточно рассматривать это прилагательное лишь как указание на Σ^* . Подробности можно найти в книге Ху Сы-цзяна [1965].

$\rightarrow S_2$, для которого $p(s \cdot s') = p(s) \cdot p(s')$ для любых $s, s' \in S_1$. Если же S_1 и S_2 есть моноиды, а p отображает единицу полугруппы S_1 в единицу полугруппы S_2 , то p называют *гомоморфизмом моноидов*.

Таким образом, умножение на 2 представляет собой гомоморфизм множества целых чисел относительно сложения, но не может рассматриваться как гомоморфизм целых чисел относительно умножения. Действительно,

$$2(a + b) = 2a + 2b,$$

но

$$2(a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b \quad (\text{если только } a \cdot b \neq 0).$$

Отображение p называется *сюръективным* (*накрытием* или *отображением на*), если для каждого $s_2 \in S_2$ найдется такое $s_1 \in S_1$, что $p(s_1) = s_2$. Короче говоря, для сюръективного отображения $p(S_1) = S_2$.

(1.6) Определение. *Представлением* полугруппы S называется гомоморфизм

$$T: S \rightarrow F_N(X),$$

где X — некоторое пространство, а $N = L$ (или R). Например, если $N = L$, то любой элемент s полугруппы S можно представить преобразованием $T(s)$ пространства X таким образом, чтобы

$$T(s \cdot s') = T(s) T(s').$$

Каждая полугруппа S имеет два очень простых представления, каждое из которых представляет s с помощью *некоторого преобразования S в себя*.

Правое регулярное представление $R: S \rightarrow F_R(S)$ описывает s с помощью преобразования R_s в виде правого умножения на s . Другими словами,

$$R(s) = R_s \in F_R(S),$$

где

$$(a) R_s = a \cdot s \quad \text{для всех } a \in S,$$

$$(a) R_{st} = ast = (as) R_t = (a) R_s R_t.$$

Левое регулярное представление $L: S \rightarrow F_L(S)$ представляет s с помощью преобразования L_s в виде левого умножения на s :

$$L(s) = L_s \in F_L(S),$$

где

$$L_s(a) = s \cdot a \quad \text{для всех } a \in S,$$

$$L_{st}(a) = sta = L_s(ta) = L_s L_t a.$$

(1.7) Определение. *Бинарным отношением* R на множестве S называется некоторое подмножество пространства $S \times S$. Мы говорим, что x связано с y отношением R (что записывается, как xRy) тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R$.

(1.8) **Определение.** Частично упорядоченным множеством называется множество P с определенным на нем бинарным отношением \leq , удовлетворяющим следующим условиям:

- (a) $x \leq x$ для любых $x \in P$ (рефлексивность);
- (b) для любых x и y из P , причем $x \leq y$ и $y \leq x$, следует, что $x = y$ (антисимметричность);
- (c) для любых x, y и z из P отношения $x \leq y$ и $y \leq z$ гарантируют, что $x \leq z$ (транзитивность).

Простейшим примером может служить множество целых чисел, на котором $x \leq y$ тогда и только тогда, когда y больше или равно x .

Более ценным примером, подчеркивающим необходимость лишь частичной упорядоченности, может служить множество всех подмножеств некоторого множества S относительно операции включения: если $X, Y \subseteq S$, то $X \leq Y$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$. Легко видеть, что при заданных X и Y может случиться, что ни одно из соотношений $X \leq Y$ и $Y \leq X$ не выполняется, а это невозможно для множества целых чисел. В такой ситуации говорят, что X и Y *несравнимы*.

Одним из основных понятий математики является понятие эквивалентности.

(1.9) **Определение.** Отношение \equiv на множестве S называется *отношением эквивалентности* тогда и только тогда, когда

- (a) $x \equiv x$ для любых $x \in S$ (рефлексивность);
- (b) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$ для любых $x, y \in S$ (симметричность);
- (c) $x \equiv y$ и $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ для любых $x, y, z \in S$ (транзитивность).

Наиболее знакомыми примерами могут служить понятия равенства в арифметике, конгруэнтности в евклидовой геометрии и подобия для невырожденных матриц.

Если s есть некоторый типичный элемент множества S , то *классом эквивалентности* элемента s называется множество $[s] = \{t: t \equiv s\}$.

Для заданных множеств S и определенного на нем отношения эквивалентности \equiv можно определить некоторое новое множество S/\equiv , множество классов эквивалентности S по модулю \equiv .

(1.10) **Определение.** *Разбиением* P множества S называется разложение S на непересекающиеся подмножества S_1, S_2, \dots , т. е.

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{для } i \neq j$$

и

$$S = \bigcup_i S_i.$$

Каждое упомянутое выше S_i называется *блоком* разбиения P .

Ясно, что $[s] = [t]$ как элементы множества S/\equiv тогда и только тогда, когда $t \equiv s$. Мы будем называть множество S/\equiv *разбиением* множества S , индуцированным отношением эквивалентности \equiv .

Отношение эквивалентности R на полугруппе S называется *правоинвариантным*, если каждый раз, когда xRy , при любых z из S справедливо $xzRyz$. Очевидно, что аналогичным образом можно определить *левоинвариантное* отношение эквивалентности.

(1.11) **Определение.** Отношение эквивалентности на полугруппе S называется *отношением конгруэнтности*, если оно одновременно и правоинвариантно и левоинвариантно.

Определим отображение $N_R: S \rightarrow S/R$ с помощью уравнения

$$N_R(t) = [t]_R,$$

где $[t]_R$ есть класс эквивалентности t относительно R .

Важность понятия конгруэнтности базируется на следующей лемме.

(1.12) **Лемма.** Если R есть некоторое отношение эквивалентности, то на множестве S/R можно определить структуру полугруппы с умножением

$$[x]_R \cdot [y]_R = [xy]_R$$

тогда и только тогда, когда R является конгруэнтностью. В этом случае N_R является гомоморфизмом, а множество S/R называют факторполугруппой.

Простую проверку этого утверждения оставляем читателю.

(1.13) **Определение.** Отношение эквивалентности на множестве S называется отношением с *конечным индексом*, если количество классов эквивалентности, порожденных этим отношением, конечно.

Если определить для разбиения P отношение \equiv_P на множестве S , потребовав, чтобы $x \equiv_P y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же блоку разбиения P , то \equiv_P есть отношение эквивалентности, а P есть по сути дела разбиение множества S , индуцированное отношением эквивалентности \equiv_P .

Наконец, скажем еще несколько слов о кардинальных числах. Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов; *счетным*, если его можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством N целых чисел (в этом случае мы говорим, что это множество имеет мощность алеф-нуль и обозначается \aleph_0), и *несчетным*, если оно не подходит ни к первому, ни ко второму случаю.

Если заданное множество S конечно и содержит ровно n элементов, то число подмножеств S равно 2^n , поскольку для каждого

из n элементов имеется два выбора — быть или не быть включенным в каждое подмножество.

Обозначим по аналогии через 2^N число подмножеств счетного множества S . Взаимно однозначное соответствие между S и N индуцирует и взаимно однозначное соответствие между множествами их подмножеств, которые, таким образом, имеют одинаковую мощность. Каждому подмножеству T множества S можно поставить в соответствие вещественное двоичное число

$$0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots,$$

где

$$t_n = \begin{cases} 1, & n \in T, \\ 0, & n \notin T. \end{cases}$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел, содержащихся в замкнутом промежутке $[0, 1]$, и множеством подмножеств T^1). Но с помощью известного алгоритма диагонализации Кантора легко показать, что множество вещественных чисел *нельзя* поставить в взаимно однозначное соответствие с множеством целых чисел, так что

$$2^N > \aleph_0.$$

Этот факт нам пригодится в следующем параграфе.

7.2 Автоматы, приведенные формы и отношения эквивалентности

Вместо того чтобы исследовать непрерывные системы, сосредоточим внимание на стационарных системах с конечными множествами входных и выходных символов и множеством моментов времени вида

$$T = \{0, 1, \dots\}.$$

Тогда, вспоминая материал § 6.1, сформулируем следующее формальное определение.

(2.1) **Определение.** Автоматом (или машиной) называется пятерка

$$M = (X, Y, Q, \lambda, \delta),$$

где

- X — некоторое конечное множество, входной алфавит;
- Y — некоторое конечное множество, выходной алфавит;
- Q — множество состояний (не обязательно конечное);
- $\lambda: Q \times X \rightarrow Q$ — одношаговая переходная функция;
- $\delta: Q \times X \rightarrow Y$ — одношаговая выходная функция.

¹⁾ Это не совсем верно. Предоставляем читателю сделать необходимые поправки.

Мы не будем предпринимать каких-либо специальных усилий, направленных на то, чтобы избежать смещения этой абстрактной модели с самой машиной, ею описываемой. Приведенное определение автомата позволяет интерпретировать его как систему, которая будучи в момент времени t в состоянии q и получив входное воздействие x , оказывается в момент времени $t + 1$ в состоянии $\lambda(q, x)$ и генерирует на выходе сигнал $\delta(q, x)$.

(2.2) **Определение.** Автомат M называется *конечным*, если конечно множество Q .

Мы можем непосредственно продолжить отображения λ и δ на X^* (свободный моноид X):

$$\lambda: Q \times X^* \rightarrow Q,$$

$$\delta: Q \times X^* \rightarrow Y,$$

определив эти отображения с помощью соответствий

$$\lambda(q, x'x'') = \lambda(\lambda(q, x'), x''),$$

$$\delta(q, x'x'') = \delta(\lambda(q, x'), x''),$$

где последовательности x' и x'' принадлежат X^* . Не будем определять, чему равно $\delta(q, \Lambda)$, но условимся, что $\lambda(q, \Lambda) = q$.

Внешнее поведение автомата M , находящегося в состоянии q в начальный момент времени, $M_q: X^* \rightarrow Y$, определяется соотношением $M_q(x) = \delta(q, x)$. Это позволяет упростить некоторые определения, введенные для систем общего вида.

(2.3) **Определение.** Состояние q эквивалентно состоянию q' тогда и только тогда, когда $M_q = M_{q'}$ как функции из X^* в Y .

(2.4) **Определение.** Автомат M называется *приведенным* тогда и только тогда, когда отображение $q \mapsto M_q$ взаимно однозначно (т. е. у приведенного автомата одна и та же функция вход — выход не может соответствовать более чем одному состоянию).

(2.5) **Определение.** Два заданных автомата $M = (X, Y, Q, \lambda, \delta)$ и $M' = (X, Y, Q', \lambda', \delta')$ называются *строго эквивалентными* тогда и только тогда, когда каждому $q \in Q$ соответствует такое $q' \in Q'$, что $M_q = M_{q'}$, и наоборот.

(2.6) **Теорема.** Каждый автомат M строго эквивалентен некоторому приведенному автомату $M^0 = (X^0, Y^0, Q^0, \lambda^0, \delta^0)$.

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы объединить между собой состояния с одинаковым внешним поведением. Пусть $Q^0 = \{f: \text{существует такое } q \in Q, \text{ что } f = M_q\}$. Но так как некоторые различные q могут давать одно и то же M_q , ясно, что $\#(Q^0) < \#(Q)$ (где $\#$ — символ мощности множества),

если только автомат M сам не является приведенным. Пусть $X^0 = X$ и $Y^0 = Y$. Теперь нам нужно определить $\lambda^0(f, x)$ и $\delta^0(f, x)$. Введем для каждого $x \in X^*$ отображение $L_x: X^* \rightarrow X^*$, где $L_x(x') = xx'$ (левое умножение на x). Тогда $\delta(\lambda(q, x)x') = \delta(q, xx') = \delta(q, L_x(x')) = M_q L_x(x')$.

Далее, $M_{M(q, x)} = M_q L_x$ есть отображение, а значит, можно определить λ^0 и δ^0 , потребовав, чтобы $\lambda^0(f, x) = f L_x$, а $\delta^0(f, x) = f(x)$. В этом случае $\lambda^0(M_q, x) = M_{M(q, x)}$ и $\delta^0(M_q, x) = \delta(q, x)$, и легко убедиться в том, что автомат M^0 является приведенным и эквивалентен автомату M .

(2.7) **Упражнение.** Покажите, что M^0 является *единственным* приведенным автоматом для M , т. е. что всякий приведенный автомат \bar{M} , строго эквивалентный M , получается из M^0 заменой обозначений состояний.

Рассмотрим некоторый автомат M , в начальный момент времени находящийся в состоянии q_0 . Тогда каждое из состояний, в которых он впоследствии окажется, можно представить в виде $\lambda(q_0, x)$, где $x \in X^*$. Другими словами, $\lambda(q_0, x)$ исчерпывает состояния, в которые можно попасть из заданного начального состояния q_0 .

Рассмотрим приведенный автомат, у которого все состояния достижимы из состояния q_0 . Обозначим его через $M(f) = (X, Y, Q_f, \lambda_f, \delta_f)$, где $f = M_{q_0}$. Мы можем описать его работу с

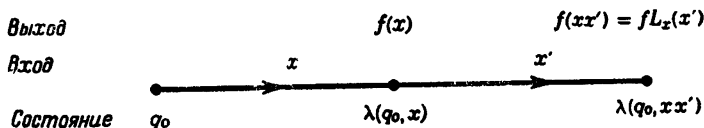


Рис. 7.1.

помощью графа, показанного на рис. 7.1. Согласно этому графу, имеем

$$Q_f = \{g: g = f L_x \text{ для некоторого } x \in X^*\},$$

$$\lambda_f(g, x) = g L_x,$$

$$\delta_f(g, x) = g(x).$$

Впоследствии мы будем иметь дело в основном лишь с приведенными автоматами, все состояния которых достижимы из некоторого заданного, т. е. с автоматами вида $M(f)$.

(2.8) **Определение.** Заданная функция $f: X^* \rightarrow Y$ реализуема конечным автоматом тогда и только тогда, когда множество Q_f конечно.

(2.9) **Определение.** Характеристической функцией χ_R множества R называется функция

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in R, \\ 0, & x \notin R. \end{cases}$$

(2.10) **Определение.** Подмножество $R \subseteq X^*$ называется *реализуемым* тогда и только тогда, когда реализуема его характеристическая функция $\chi_R: X^* \rightarrow \{0, 1\}$.

Конечный автомат задается конечной таблицей. Мы можем выписывать эти таблицы одну за другой. Поэтому множество конечных автоматов (и тем более множество реализуемых множеств) счетно, т. е. его мощность равна \aleph_0 . Но так как мощность множества X^* равна \aleph_0 , у него должно быть 2^{\aleph_0} подмножеств, т. е. их множество несчетно. Поэтому большинство подмножеств множества X^* *нереализуемы*.

(2.11) **Определение (эквивалентности Нерода).** Для заданной функции $f: X^* \rightarrow Y$ определим отношение эквивалентности E_f на X^* , если

$$xE_fx' \Leftrightarrow f(xz) = f(x'z) \quad \text{для всех } z \in X^*.$$

Заметим, что $xE_fx' \Leftrightarrow fL_x = fL_{x'}$ и что, следовательно, классы эквивалентности Нерода $[x]_{E_f}$ можно рассматривать как элементы пространства состояний Q_f автомата $M(f)$, являющегося минимальным автоматом, реализующим f . Легко убедиться в справедливости следующего предложения.

(2.12) **Предложение.** (а) E_f есть правоинвариантное отношение эквивалентности; (б) если f реализуемо, то индекс отношения E_f конечен, и наоборот.

(2.13) **Пример.** Множество $R = \{0, 01, 01^2, \dots\}$ реализуемо.

Доказательство 1 (с помощью эквивалентности Нерода). Пусть $X = \{0, 1\}$. Тогда утверждение xE_y требует, чтобы

$$xz \in R \Leftrightarrow yz \in R \quad \text{при любых } z \in X^*.$$

Заметим, что мы имеем здесь три класса эквивалентности: $\{\Lambda\}$, R и $X^* - (RU\{\Lambda\})$, а значит, индекс отношения E конечен.

Доказательство 2. Можно построить автомат, реализующий R либо непосредственно либо в виде $M(\chi_R)$ (отметим, что у него будут три состояния, так как состояния минимального автомата должны соответствовать классам эквивалентности Нерода). В любом случае окажется, что

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1\}, \\ Y &= \{0, 1\}, \\ Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \end{aligned}$$

где q_0 есть начальное состояние, а λ и δ задаются таблицами

λ	0	1	δ	0	1
q_0	q_1	q_2	q_0	1	0
q_1	q_2	q_1	q_1	0	1
q_2	q_2	q_2	q_2	0	0

Реакция системы в состоянии q_1 равна 1, в противном случае она равна нулю. Другими словами, последовательность воспринимается только в том случае, если она переводит автомат из состояния q_0 в состояние q_1 . Доказательство закончено.

Читателю следует самому убедиться в том, что если некоторое множество реализуемо, то реализуемо и любое множество, отличающееся от первого лишь конечным числом элементов.

(2.14) Пример. Множество $R = \{0^{n^2-1}1 : n > 0\}$ нереализуемо.

Доказательство 1 (с помощью эквивалентности Нерода). Имеем $i \neq j \Rightarrow$ не $(0^i E 0^j)$ и, следовательно, индекс отображения E не может быть конечным.

Доказательство 2. Пусть автомат $M(\chi_R)$ имеет конечное число состояний. Но так как число различных последовательностей 0^k бесконечно, должна найтись такая пара (k, l) , что

$$(2.15) \quad \chi_R L_0^k = \chi_R L_0^l.$$

Выберем любое $n^2 - 1 > k > 1$. Тогда для любого положительного целого t многократное применение соотношения (2.15) показывает, что

$$\chi_R (0^{n^2-1+t(k-l)}1) = \chi_R (0^{n^2-1}1),$$

а значит, множество R не такое, как мы предполагали.

(2.16) **Определение (эквивалентности Майхилла).** Назовем \equiv_f для заданной функции $f: X^* \rightarrow Y$ отношением эквивалентности Майхилла на X^* , если

$$(2.17) \quad \begin{aligned} x \equiv_f x' &\Leftrightarrow f(yxz) = f(yx'z) \text{ для всех } y, z \in X^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow fL_y L_x = fL_y L_{x'} \text{ для всех } y \in X^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{входные последовательности } x \text{ и } x' \text{ индуцируют} \\ &\text{на } Q_f \text{ одну и ту же функцию, т. е.} \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x'}: Q_f \rightarrow Q_f,$$

где

$$\mathfrak{M}_x([y]_E) = [yx]_E.$$

Отметим, в частности, что $x \equiv_f x' \Rightarrow x E_f x'$, но обратное не обязательно верно.

(2.19) **Упражнение.** Пусть автомат $M(f)$ имеет n состояний, а $|X^*/\equiv_f| = n'$. Покажите, что $n \leq n' \leq n^n$. Для произвольного n укажите примеры функций, при которых достигается каждый из этих пределов.

Решение. Здесь n' есть индекс (число классов эквивалентности) отношения \equiv_f , и, следовательно, он не меньше, чем индекс отношения E_f , который равен n . В то же время индекс n' должен быть не больше числа различных функций, отображающих Q_f в Q_f , а их число равно n^n . Таким образом, $n \leq n' \leq n^n$.

Приведем теперь несколько примеров, простая проверка которых предоставляется читателю.

(2.20) **Пример.** $n' = n$. Пусть автомат $M(f)$ имеет $n-1$ возвратных входов

$$X = \{x_1, \dots, x_{n-1}\},$$

для которых $f(zx_n) = x_n$, каково бы ни было $z \in X^*$ (а $f(\Lambda)$, например, равно x_1).

(2.21) **Пример.** $n' = n^n$. Пусть Y имеет n элементов $\{y_1, \dots, y_n\}$, а X содержит n^n элементов $\{x_1, \dots, x_{n^n}\}$. Перенумеруем n^n функций, отображающих Y в Y элементами множества X , обозначив их через $g_{x_1}, \dots, g_{x_{n^n}}$. Определим $f(\Lambda) = y_1 \in Y$, а $f(zx_i) = g_{x_i}(f(z))$

при всех $z \in X^*$. (На самом деле множество X можно выбрать много меньшим; достаточно, чтобы g_x были элементами множества образующих полугруппы отображений Y в Y .)

В частности, справедливо следующее предложение.

(2.22) **Предложение.**

(а) Из того что индекс отношения эквивалентности \equiv_f конечен, следует конечность индекса отношения E_f , а отсюда заключаем, что автомат $M(f)$ конечен.

(б) Из того что автомат $M(f)$ конечен, следует, что конечно множество Q_f , а отсюда заключаем, что число различных функций, отображающих Q_f в Q_f , конечно, и, следовательно, конечен индекс отношения эквивалентности \equiv_f .

Заметим, что из $x \equiv_f x'$ и $y \equiv_f y'$ следует, что для всех $z \in X^*$

$$fL_z L_{xy} = fL_z L_x^* L_y = fL_z L_x L_{y'} = fL_z L_{x'} L_{y'} = fL_z L_{x'y'} \Rightarrow xy \equiv_f x'y',$$

а поэтому отношение эквивалентности Майхилла является конгруэнтностью, и мы можем образовать фактормоноид.

(2.23) **Определение.** Для заданной функции $f: X^* \rightarrow Y$ моноидом (полугруппой) функции f называется

$$S_f = X^* / \equiv_f.$$

Элементы моноида S_f соответствуют входным последовательностям, рассматриваемым как переходные функции автомата $M(f)$. Закон композиции определяется последовательными преобразованиями состояния.

(2.24) **(Важнейшее) замечание.** Если $M(f)$ конечен, то полугруппа S_f также конечна, и наоборот.

(2.25) **Пример.** Вычислите S_{χ_R} для $R = \{0, 01, 01^2, \dots\}$.

Построение. Для вычисления $S_f (f = \chi_R)$ в виде множества функций, определенных на Q_f , воспользуемся тем, что мы уже знаем относительно Q_f . Мы выяснили, что состояния автомата $M(\chi_R)$ имеют вид $q_0 = [\Lambda]_E$, $q_1 = [0]_E$ и $q_2 = [1]_E$. Теперь же нам нужно дополнительно разбить эти классы на новые множества так, чтобы на всех последовательностях из данного подмножества отображение Q_f оказалось тождеством. Методом проб и ошибок быстро убеждаемся, что $s_0 = q_0$, $s_1 = q_1$, $s_2 = \{1^m\}$, а $s_3 = q_2 - s_1$. Функции, определенные на Q_f , задаются следующей таблицей:

	s_0	s_1	s_2	s_3
q_0	q_0	q_1	q_2	q_2
q_1	q_1	q_2	q_1	q_2
q_2	q_2	q_2	q_2	q_2

Отсюда можно заключить, что $S_{\chi_R} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\} = \{[\Lambda], [0], [1], [10]\}$ имеет следующую таблицу умножения:

	s_0	s_1	s_2	s_3
s_0	s_0	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_3	s_1	s_3
s_2	s_2	s_3	s_2	s_3
s_3	s_3	s_3	s_3	s_3

7.3 Автоматы и полугруппы

Мы выяснили, как переходить от автоматов к полугруппам. Теперь мы сосредоточим внимание на том, как полугруппа характеризует автомат. Последующие две главы будут посвящены изучению структуры автоматов посредством выяснения структуры соответствующих полугрупп.

В теории полугрупп гомоморфизмом называется такое отображение $h: S \rightarrow S'$, что $h(ss_1) = h(s)h(s_1)$. Соответствующее понятие для автоматов вида $M(f)$ принимает, таким образом, форму гомоморфизма входных полугрупп $h: X^* \rightarrow (X')^*$, который на самом деле полностью определяется значениями, принимаемыми на X . Если автомат $M(f')$ начинает работать в состоянии $f'L_t$, когда автомат $M(f)$ находится в начальном состоянии f , то можно индуцировать отображение, потребовав, чтобы действие x на f соответствовало действию $h(x)$ на $f'L_t$. Если отображение

$$h_Q: Q_f \rightarrow Q_{f'}$$

определяется условием $h_Q(fL_x) = f'L_tL_{h(x)}$ и если $q = fL_{x'}$, то, так как h есть гомоморфизм, имеем

$$\begin{aligned} h_Q(\lambda_f(q, x)) &= h_Q(fL_{x'}) = f'L_tL_{h(x'x)} = \\ &= f'L_tL_{h(x')}L_{h(x)} = \\ &= \lambda_{f'}(h_Q(q), h(x)). \end{aligned}$$

А это подсказывает следующее определение для автоматов общего вида.

(3.1) Определение. Гомоморфизмом $h: M \rightarrow M'$ автоматов называется отображение

$$h: Q \cup X \rightarrow Q' \cup X',$$

для которого $h(Q) \subseteq Q'$, $h(X) \subseteq X'$, и при всех $q \in Q$ и $x \in X$ справедливо

$$\lambda'(h(q), h(x)) = h(\lambda(q, x)).$$

Однако в рамках теории автоматов более естественным кажется понятие модели. Мы говорим, что автомат M моделирует автомат M' , если при условии соответствующего кодирования и декодирования входных и выходных символов автомат M может, находясь в подходящем состоянии, преобразовывать входные последовательности точно так же, как и автомат M' . Потребуем, чтобы кодирующее и декодирующее устройства не имели памяти (т. е. преобразовывали символы поодиночке) с тем, чтобы автомат M проделывал всю работу, связанную с запоминанием (см. рис. 7.2).

(3.2) **Определение.** Автомат M моделирует автомат M' , если существует тройка (h_1, h_2, h_3) , где

- (a) $h_1: (X')^* \rightarrow X^*$ есть некоторый гомоморфизм моноидов,
- (b) $h_2: Q' \rightarrow Q$,
- (c) $h_3: Y \rightarrow Y'$,

такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} (X')^* & \xrightarrow{M'q'} & Y' \\ \downarrow h_1 & & \uparrow h_3 \\ X^* & \xrightarrow{M_{h_2(q')}} & Y \end{array}$$

Другими словами, отображение $(X')^*$ в Y' должно не зависеть от выбранного пути:

$$M'_q(x') = h_3(M_{h_2(q)}(h_1(x')))$$

или

$$\delta'[q', x'] = h_3(\delta(h_2(q'), h_1(x'))).$$

Автоматы M и M' называются *слабо эквивалентными*, если M моделирует M' , а M' моделирует M . Станем писать, что $M' | M$,

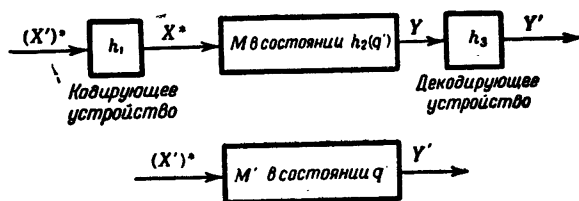


Рис. 7.2. Автомат M моделирует M' , если h_1 , h_2 и h_3 можно выбрать таким образом, чтобы приведенные выше системы имели идентичное внешнее поведение.

если M моделирует M' , и читать это так: „ M' делит M “ (здесь нельзя изменять порядок).

(3.4) **Лемма.** Пусть автомат M' приведен. Тогда M моделирует M' тогда и только тогда, когда существует тройка (h_1, h'_2, h_3) , где

- (a) $h_1: (X')^* \rightarrow X^*$ есть некоторый гомоморфизм моноидов;
- (b) h'_2 отображает подмножество Q'' множества Q на Q' : $Q \supseteq Q'' \xrightarrow{h'_2} Q'$;
- (c) $h_3: Y \rightarrow Y'$,

такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} (X')^* & \xrightarrow{M'_{h'_2(q)}} & Y' \\ h_1 \downarrow & & \uparrow h_3 \\ X^* & \xrightarrow{M_q} & Y \end{array}$$

Доказательство. Зафиксируем h_1 и h_3 и покажем, как заменить h_2 из диаграммы (3.3) на h_2 из диаграммы (3.5).

(а) Начнем с диаграммы (3.3). Поскольку автомат M' приведен, ни одно состояние автомата M не может моделировать двух состояний автомата M' , так что отображение h_2 должно быть взаимно однозначным. Поэтому можно выбрать $Q'' = h_2(Q')$ и обеспечить коммутативность диаграммы (3.5), положив на Q'' , что $h'_2 = h_2^{-1}$.

(б) Перейдем теперь к диаграмме (3.5). Для любого $q' \in Q'$ выберем $h_2(q')$ так, чтобы это было любое q (а число возможных выборов может быть велико) такое, чтобы $h'_2(q) = q'$. Это гарантирует коммутативность диаграммы (3.3).

(3.6) **Замечание.** Критерий (3.5) моделируемости приведенных автоматов легко поддается алгебраическим обобщениям, чего нельзя сказать о критерии (3.3).

(3.7) **Замечание.** Если условие (3.5) выполнено, то M моделирует M' независимо от того, приведен ли автомат M' или нет.

Для заданного автомата $M(f)$ мы научились строить моноид S_f с классом эквивалентности пустой последовательности в качестве единицы.

Обратно, по заданному моноиду S можно построить автомат, называемый *автоматом полугруппы* S , т. е. автомат

$$M(S) \stackrel{\text{def}}{=} (S, S, S, \cdot, \cdot),$$

в котором \cdot обозначает полугрупповое умножение. Если автомат $M(S)$ в момент времени t находится в состоянии s и получает входной символ s' , то в момент времени $(t+1)$ его состояние и выходной символ одновременно равны $s \cdot s' \in S$.

Если же вернуться теперь от полугруппы S_f к автомату $M(S_f)$, то возникает вопрос, в каком смысле этот автомат и исходный автомат $M(f)$ одинаковы. Ясно, что эти автоматы не эквивалентны, так как мы помним, что если число состояний автомата $M(f)$ равно n , то число состояний автомата $M(S_f)$ равно n' , где $n \leq n' \leq n^n$, и достижимы оба указанных предела.

Но нам все же хочется обнаружить, в каком смысле автомат и его полугруппу можно считать эквивалентными.

Рассматривая полугруппы как средство представления автоматов, мы интересовались не только переходом от одного состояния к другому, но и изменением выходных величин. Поэтому для заданной полугруппы S_f можно определить также и функцию $i_f: S_f \rightarrow Y$ так, что если x переводит автомат из начального состояния в состояние, описываемое $s \in S_f$ (т. е. если $s = [x]$), то необходимо, чтобы $i_f(s) = f(x)$. Заметим, что функция i_f вполне определена и зависит только от s , а не от выбора представления x . Теперь $M(S_f, i_f)$ представляет собой автомат $(S_f, Y, S_f, \cdot, \delta_f)$, где $\delta_f(s, s') = i_f(s \cdot s')$, т. е. это автомат типа состояние—выход. В таком автомате следующий выходной символ полностью определяется текущим состоянием автомата.

(3.8) **Предложение.** Автомат $M(S_f, i_f)$ слабо эквивалентен автомату $M(f)$.

Доказательство. То, что автомат $M(S_f, i_f)$ моделирует автомат $M(f)$, сразу следует из рис. 7.3, где $j_f: X \rightarrow S_f$ определяется соотношением $j_f(x) = [x]_f$ (здесь $[x]_f$ есть класс эквивалентности Майхилла).

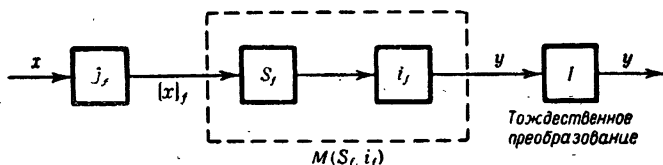


Рис. 7.3

Чтобы убедиться в том, что $M(f)$ моделирует $M(S_f, i_f)$, необходимо найти такие отображения $h_1: S_f \rightarrow X^*$, $h_2: S_f \rightarrow Q_f$ и $h_3: Y \rightarrow Y$, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X^* & \xrightarrow{M(f) \ h_2(s)} & Y \\
 \uparrow h_1 & & \downarrow \text{Id} \\
 S_f^* & \xrightarrow{M(S_f, i_f)_s} & Y
 \end{array}$$

была коммутативной¹⁾.

¹⁾ В этом случае автомат M' , вообще говоря, не является приведенным, и мы не можем найти h'_2 , удовлетворяющее критерию (3.5).

Для каждого $s \in S$ выберем $h_1(s)$ в виде такого $x \in X^*$, что $s = [x]_{=}$. Если $s = [x]_{=}$, то положим $h_2(s) = fL_x$. Такое определение не зависит от выбора x , так как $[x]_{=} = [x']_{=} \Rightarrow fL_x = fL_{x'}$. Наконец, положим $h_3(y) = y$.

Описанное отображение h_1 можно выбирать многими способами, и любой из них обеспечит коммутативность приведенной диаграммы, так как

$$\begin{aligned} M(S_f, i_f)_s(s') &= i_f(ss') = \\ &= f(h_1(ss')) = \\ &= f(h_1(s) h_1(s')) = \\ &= M(f)_{[h_1(s)]_E}(h_1(s')) = \\ &= M(f)_{h_2(s)}(h_1(s')), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство предложения.

Если мы хотим исследовать автоматы на алгебраическом языке, то нам следует построить S_f и i_f . Воспользуемся теперь полугруппами и восстановим понятия теории автоматов. До сих пор основную роль играло понятие модели. Попробуем ввести соответствующее понятие в теорию полугрупп и убедимся в его содержательности. Имея в виду лемму (3.4b) в качестве отправной точки, сформулируем следующее определение.

(3.9) Определение. Полугруппа S делит полугруппу S' , если существуют подполугруппа $S'' \subset S'$ и гомоморфизм Z полугруппы S'' на S или

$$S | S' \Leftrightarrow S' \supseteq S'' \xrightarrow{Z} S.$$

Таким образом, S' может моделировать S в том смысле, что умножение в S' индуцирует умножение в S с помощью Z , и нам может потребоваться для этого только часть S' , а именно подполугруппа S'' .

Пусть S и S' есть две полугруппы с определенными на них отображениями $i: S \rightarrow Y$ и $i': S' \rightarrow Y'$. Тогда можно говорить, что (S, i) делит (S', i') , если найдутся такая подполугруппа S'' полугруппы S' , отображение Z подполугруппы S'' на S , а также отображение $H: Y' \rightarrow Y$, что

$$i(Z(s)) = H(i'(s)) \quad \text{для всех } s \in S',$$

а это означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} S \supseteq S'' & \xrightarrow{Z} & S \\ i' | S'' \downarrow & & \downarrow i \\ Y' & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Станем писать, что $g|f$, если $M(f)$ моделирует $M(g)$ при условии, что оба автомата начинают работать из своих начальных состояний, т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{g} & Y \\ h \downarrow & & \uparrow h \\ (X')^* & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

является коммутативной, или $g = Hfh$.

Докажем теперь, что если одна полугруппа делит другую, то делятся и соответствующие автоматы (и наоборот), начинающие работать из начальных состояний.

(3.10) Теорема. $g|f \Leftrightarrow (S_g, i_g) | (S_f, i_f)$.

Доказательство. Пусть $g = Hfh$. Тогда имеем $S_g = (X)^* / \equiv_g$, а $S_f = (X')^* / \equiv_f$, так что положим $S'' = \{[h(x)]_f : x \in X^*\}$. Заметим, что S'' является подполугруппой группы S_f . Определим Z как отображение, «обратное» отображению h и суженное на классы эквивалентности. Другими словами, пусть $Z([h(x)]_f) = [x]_g$. Очевидно, что Z сюръективно и, если вполне определено, является гомоморфизмом, т. е. $[h(x)]_f = [h(x_1)]_f \Rightarrow [x]_g = [x_1]_g$. Но справедливость приведенной импликации вытекает из того, что для всех y и z имеем

$$\begin{aligned} g(yxz) &= Hfh(yxz) = \\ &= Hf(h(y)h(x)h(z)) = \\ &= Hf(h(y)h(x_1)h(z)) = \quad [\text{поскольку } h(x) \equiv_f h(x_1)] \\ &= Hfh(yx_1z). \end{aligned}$$

Легко проверить, что нас удовлетворяет и H ; на этом первая половина доказательства заканчивается.

Обратное утверждение. Если $(S_g, i_g) | (S_f, i_f)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_f & \xrightarrow{i_f} & Y' \\ z \downarrow & & \uparrow H \\ S_g & \xrightarrow{i_g} & Y \end{array}$$

коммутативна. С целью доказательства для каждого заданного $x \in X$ выберем $h(x)$ в виде некоторого $t \in (X')^* \ni Z([t]_f) = [x]_g$. А так как Z сюръективно, всегда найдется по крайней мере одно такое t . Но тогда имеем

$$Hfh(x) = H(i_f([h(x)]_f)) = i_g(Z([h(x)]_f)) = i_g([x]_g) = g(x),$$

что и завершает доказательство.

(3.11) **Важное замечание.** В следующих двух главах мы будем предполагать, что наши автоматы есть автоматы типа *состояние — выход*. Таким образом, запись

$$(3.12) \quad M = (X, Y, Q, \lambda, \beta)$$

означает, что текущее состояние автомата M определяет текущее значение выходного символа заданием функции $\beta: Q \rightarrow Y$ (мы можем вернуться и к одношаговой выходной функции $\delta: Q \times X \rightarrow Y$, заметив, что теперь это всегда лишь $\beta \circ \lambda$).

Упомянув об автомате, обозначенном некоторым символом, например символом N , мы будем предполагать, что ему соответствует пятерка типа (3.12), различные символы которой помечены соответствующим нижним индексом [например, $(X_N, Y_N, Q_N, \lambda_N, \beta_N)$].

Если же автомат обозначается символом M с каким-нибудь индексом, например символом M' , то иногда для простоты мы будем помечать элементы его пятерки (3.12) аналогичным индексом [например, $(X', Y', Q', \lambda', \beta')$]. Такая двойная система обозначений не должна вызвать путаницы.

8 Декомпозиция конечных автоматов без петель

Как известно (см., например, гл. 1 книги Арбиба [1964]), для произвольного конечного автомата можно построить модель в виде некоторой сети модулей с запаздываниями (конечных автоматов с *одним состоянием*) при условии, что в сети допускаются петли любой сложности. На самом же деле для построения такой сети можно даже использовать модули только одного типа (модули, реализующие штрих Шеффера). Другими словами, если *допустить возможность петель*, то произвольный конечный автомат удастся построить с помощью весьма простого набора компонент. В следующих двух главах мы выясним, что если допустимыми считаются лишь структуры без петель, то реализовать произвольный конечный автомат с помощью конечного набора компонент не удастся. В первом параграфе мы дадим главные определения, сформулируем важнейшие результаты алгебраической теории декомпозиции конечных автоматов в структуры без петель и наметим стратегию доказательств.

8.1 Общий взгляд на теоремы декомпозиции

Рассмотрим прежде всего один комбинированный способ соединения двух автоматов, частным случаем которого являются и последовательное, и параллельное соединения.

(1.1) **Определение.** Два заданных автомата типа состояние — выход M' и M , отображение $Z: X \times Y \rightarrow X'$ и отображение $\eta: X \rightarrow X$ определяют автомат $M' \times_Z M$, называемый *каскадным соединением M' и M с отображением связи Z* , если

$$M' \times_Z M = (\tilde{X}, Y' \times Y, Q' \times Q, \lambda_Z, \beta_Z),$$

а λ_Z и β_Z определяются, согласно схеме на рис. 8.1, уравнениями

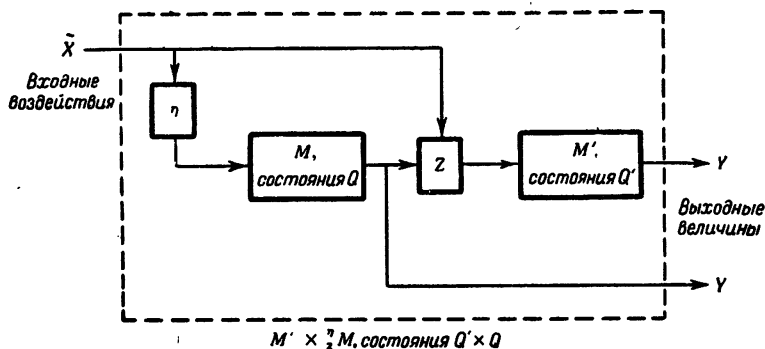
$$\begin{aligned}\lambda_Z((q', q), \tilde{x}) &= (\lambda'(q', Z(\tilde{x}, \beta(q))), \lambda(q, \eta(\tilde{x}))), \\ \beta_Z(q', q) &= (\beta'(q'), \beta(q)).\end{aligned}$$

Обычно отображение η в явном виде не упоминается.

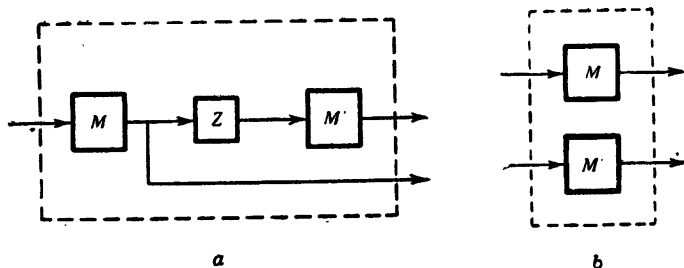
Чтобы получить теперь *последовательное* соединение (одновременно сохраняя выходные величины автомата M), нужно обеспечить независимость отображения Z от X' . *Параллельное* соединение получается, если $Z(\tilde{x}', y) = \tilde{x}'$, как показано на рис. 8.2.

Теперь мы можем строго сформулировать понятие композиции автоматов без петель, потребовав, чтобы эта композиция получалась в результате многократного образования каскадных соединений, а также кодирующих и декодирующих автоматов без памяти.

(1.2) **Определение.** Для некоторого заданного семейства \mathfrak{M} автоматов через $C(\mathfrak{M})$ ¹⁾ обозначается наименьшее семейство автоматов,



Р и с. 8.1.



Р и с. 8.2. а — автоматы M и M' соединены последовательно через безинерционное кодирующее устройство Z ; б — автоматы M и M' «соединены» параллельно.

содержащих \mathfrak{M} и замкнутых относительно операций каскадной композиции и моделирования.

Автомат, построенный таким образом из более чем двух автоматов, мы будем также называть *каскадной* композицией этих автоматов.

¹⁾ Крон и Роудз [1965] предпочитают использовать множество $SP(\mathfrak{M})$, построенное с помощью последовательно-параллельных соединений, а не $C(\mathfrak{M})$, основанное на каскадном соединении. Взаимосвязь между этими двумя понятиями рассматривается у Арбиба [1968b].

Прежде чем сформулировать наши основные теоремы, нужно еще ввести понятие автомата, для которого входное воздействие либо переводит автомат в состояние, определяемое этим воздействием, либо оставляет все состояния неизменными.

(1.3) **Определение.** Автомат M называется *тождественно-возвратным*, если для каждого $x \in X$ отображение $\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$ является либо тождественным отображением на Q , либо постоянно (не зависит от q , возвратное), а выходная величина автомата совпадает с состоянием автомата.

Рассмотрим теперь тождественно-возвратный автомат с двумя состояниями, который мы будем называть *триггером* F . У триггера F множество возможных состояний равно $\{q_0, q_1\}$, а множество входных воздействий есть $\{e, x_0, x_1\}$, причем $\lambda(q, e) = q$, так что e представляет собой нейтральное входное воздействие, а $\lambda(q, x_i) = q_i$, где x_i «возвращает автомат в состояние q_i ».

(1.4) **Предложение.** *Каждый тождественно-возвратный автомат можно построить в виде каскадного соединения триггеров F .*

План построения. На самом деле мы воспользуемся лишь операциями кодирования, декодирования и параллельного соединения. Пусть M есть некоторый тождественно-возвратный автомат с n состояниями. Выберем m так, чтобы $n \leq 2^m$, и построим автомат F^m , представляющий собой m экземпляров автомата F , соединенных друг с другом параллельно. Выберем наугад любые n из 2^m состояний автомата F^m и декодируем их в выходные величины (состояния) $\{q_1, \dots, q_n\}$ автомата M . Если теперь входное воздействие x автомата M является нейтральным, то кодирующий автомат должен преобразовывать его в нейтральные входные воздействия всех m экземпляров F . Если же x возвращает M в состояние q_i , то оно кодируется такой конфигурацией возвращающих входных воздействий каждого из триггеров, чтобы она вызывала переход автомата F^m в состояние, поставленное в соответствие q_i . Описанная структура показана на рис. 8.3, причем ограниченная пунктиром система преобразует входные воздействия и выходные величины точно так же, как автомат M . На этом описание построения автомата M заканчивается.

Автомату F соответствует полугруппа $U_3 = \{1, r_0, r_1\}$, элементами которой служат классы эквивалентности Майхилла $1 = [e]$, $r_0 = [x_0]$ и $r_1 = [x_1]$ ¹⁾, а умножение определяется соотношениями $u \cdot 1 = u$ и $u \cdot r_i = r_i$ (так что 1 есть единичный элемент группы, а r_0 и r_1 — ее так называемые «правые нули»).

¹⁾ Читатель может легко убедиться в этом самостоятельно.

(1.5) **Определение.** Элементами называется множество полугрупп, делящих U_3 .

Но у U_3 имеются подполугруппы U_3 , $U_2 = \{r_0, r_1\}$, $U_1 = \{1, r_0\}$ и ей изоморфная $\{1, r_1\}$, а также $U_0 = \{1\}$.

Если $S \mid U_3$, то должна иметь место диаграмма $U_3 \cong S' \rightarrow S$, а отсюда следует, что с точностью до изоморфизмов элементы равны $\{U_0, U_1, U_2, U_3\}$.

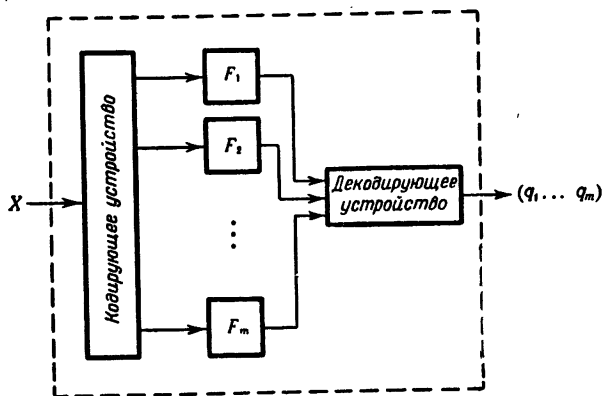


Рис. 8.3.

Теперь нам нужно определить, что мы имеем в виду, когда говорим: «Не допуская циклов, мы не сможем разложить автомат на „меньшие“».

(1.6) **Определение.** Автомат N называется s -неприводимым, если каждый раз, когда он моделируется каскадным соединением двух автоматов M_1 и M_2 с полугруппами S_1 и S_2 , имеет место либо $N \mid M(S_1)$, либо $N \mid M(S_2)$.

Таким образом, если вы утверждаете, что автомат N можно представить с помощью нескольких более простых автоматов, то это просто самообман, так как для моделирования автомата N оказывается достаточным одного полугруппового автомата либо M_1 , либо M_2 . Выясним, какие же автоматы принадлежат к классу s -неприводимых. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, доказательством которого мы займемся в гл. 9.

(1.7) **Предложение.** Автомат M является s -неприводимым, если M есть либо элемент, либо простая группа своей полугруппы¹⁾.

¹⁾ Читатель, не знакомый с теорией групп, найдет основные определения (например, простой группы) в следующем параграфе. Центральную роль для понимания важности понятия простой группы в теории автоматов играет теорема Жордана — Гёльдера, также приведенная там.

Здесь возникает вопрос о том, из каких неприводимых автоматов следует строить заданный. Ответ на этот вопрос заключен в следующем предложении, доказательством которого мы также займемся в гл. 9.

(1.8) Предложение. *Заданный автомат $M(f)$ моделируется каскадной композицией триггеров и автоматов, простые группы которых (не обязательно все) делят полугруппу S_f .*

Предложения (1.7) и (1.8) вместе образуют *теорему Крона — Роудза*, впервые доказанную Кроном и Роудзом [1965]. Развитие этой теоремы дано в работе Крона, Роудза и Тилсона [1968], опубликованной в сборнике под редакцией Арбиба [1968a]; в упомянутом сборнике содержится также богатый материал по алгебраической теории автоматов, языков и полугрупп. В заключение параграфа наметим наш подход к доказательству этих результатов.

Следуя Зейгеру [1965], введем прежде всего такое определение.

(1.9) Определение. Назовем *PR-автоматом* автомат, каждое входное воздействие которого вызывает либо перестановку, либо возвращает его в некоторое состояние.

Другими словами, для каждого $x \in X$ либо отображение $\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$ является взаимно однозначным (перестановочным), либо отображение $\lambda(\cdot, x): Q \rightarrow Q$ постоянно (возвращает автомат в зависящее от x состояние). Перестановочные отображения порождают группу, называемую *группой PR-автоматов*, которая не совпадает в точности с полугруппой этого автомата, но может быть получена из нее, если отбросить возвратные реакции.

Доказательство теоремы Крона — Роудза можно разбить теперь на четыре части.

(1.10) *Любой автомат можно представить в виде структуры без петель из PR-автоматов, группы которых делят полугруппу исходного автомата.*

Этот результат принадлежит Зейгеру [1965], который особо подчеркивает, что можно удовлетвориться этим утверждением и синтезировать произвольные конечные автоматы из PR-автоматов. Нас, однако, интересует математическая теория и потому мы хотим доказать и остальные три части.

(1.11) *Произвольный PR-автомат можно представить в виде каскадного соединения некоторого полугруппового автомата $M(G)$, где G есть некоторая группа, и некоторого тождественно-возвратного автомата, причем группа G есть группа перестановок для PR-автомата.*

(1.12) Любой групповой автомат $M(G)$ можно моделировать каскадным соединением (не обязательно всех) автоматов простых групп, делящих G .

Свойство делимости транзитивно, и поэтому ясно, что любой автомат можно построить из триггеров и из автоматов простых групп, делящих его полугруппу. Действительно, все эти автоматы являются s -неприводимыми.

(1.13) Триггеры и автоматы простых групп s -неприводимы.

Утверждения (1.10) — (1.13) эквивалентны результату Крона — Роудза.

8.2 Некоторые сведения из теории групп и полугрупп

Подойдем к традиционному изучению нормальных подгрупп относительно новым путем, задав себе вопрос: чем становится отношение конгруэнтности, если наша полугруппа является группой?

(2.1). **Предложение.** Пусть G есть некоторая группа, и пусть \equiv есть отношение конгруэнтности в группе G . Обозначим через $[g]$ класс эквивалентности элемента $g \in G$. Тогда $N = [1_G]$, где 1_G , единица в группе G , есть некоторая подгруппа группы G .

Доказательство. Стандартная проверка групповых свойств N состоит в том, чтобы убедиться, что при всех $a, b \in N$ справедливо $ab^{-1} \in N$. Докажем, что это так:

$$ab^{-1} = ab^{-1} \cdot 1 \equiv ab^{-1} \cdot b = a \equiv 1.$$

(2.2) **Предложение.** Пусть $aN = \{an: n \in N\}$ и $Na = \{na: n \in N\}$. Тогда $[a] = aN = Na$, каково бы ни было $a \in G$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} b \in [a] &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \equiv a^{-1} \cdot a = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^{-1}b \in N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = a \cdot a^{-1} \cdot b \in aN. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[a] = aN.$$

Аналогично находим

$$[a] = Na.$$

(2.3) **Определение.** Подгруппа N группы G называется *нормальной*, если для любых $g \in G$ справедливо

$$gN = Ng.$$

Мы записываем это в символической форме, как $N \triangleleft G$. Заметим, что произвольная подгруппа некоторой группы не обязательно

нормальна. Например, обозначим через A_n знакопеременную группу n символов (т. е. множество перестановок элементов множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$, которое может быть получено в результате четного числа перестановок пар символов). Как известно (см., например, § 48 монографии Ван дер Вардена [1931]), группа A_n ($n > 4$) не имеет нормальных подгрупп. Тем не менее, если $m < n$, то A_m можно рассматривать как некоторое подмножество групп A_n , для чего элементы из A_m нужно рассматривать как те перестановки $\{0, 1, \dots, n-1\}$, которые оставляют множество $\{m, m+1, \dots, n-1\}$ нетронутым.

Группа называется *абелевой*, если ее умножение коммутативно, т. е. ab всегда равно ba . Непосредственно из определения следует, что любая подгруппа абелевой группы нормальна.

(2.4) Предложение. Для заданной $H \leq G$ (что читается так: «для заданной подгруппы H группы G ») множества gH образуют разбиение G (разбиение на классы смежности), называемое *левой кодекомпозицией*, т. е.

$$gH \cap g'H \neq \emptyset \Rightarrow gH = g'H \quad \text{для любых } g \text{ и } g' \in G.$$

Доказательство. Если $g'' \in gH \cap g'H$, то $g'' = gh = g'h'$ при соответствующих $h, h' \in H$. Но тогда

$$gH = g'h'h^{-1}H = g'H.$$

Аналогичный результат справедлив и относительно правых кодекомпозиций. Отсюда приходим к следующему важному результату.

(2.5) Лемма. Для заданной $H \leq G$ левая (правая) кодекомпозиция группы G является конгруэнтностью тогда и только тогда, когда $H \triangleleft G$. Каждое отношение конгруэнтности в группе G определяет некоторую кодекомпозицию некоторой $N \triangleleft G$. Если $N \triangleleft G$, то G/N обозначает факторполугруппу, индуцированную левым (правым) отношением конгруэнтности классов смежности.

(2.6) Лемма. G/N есть группа (она называется факторгруппой G относительно N).

Доказательство. Согласно приведенным ранее результатам теории полугрупп, легко видеть, что в этой полугруппе N определено ассоциативное умножение, такое, что

$$aN \cdot bN = [a] \cdot [b] = (ab)N.$$

Остается заметить лишь, что $N = [1]$ является единицей, а для aN имеется обратное $a^{-1}N$. Доказательство окончено.

Отображение $h: G \rightarrow G/N$, определяемое условием $h(g) = gN$, называется каноническим *эпиморфизмом* (где «эпи» указывает на сюръективность отображения, а «морфизм» — результат сокраще-

ния слова «гомоморфизм»). Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{h \times h} & G/N \times G/N \\ m_G \downarrow & & \downarrow m_{G/N} \\ G & \xrightarrow{h} & G/N \end{array}$$

коммутативна, если отображение $m_G: G \times G \rightarrow G$ описывает групповую операцию в группе G и т. д. Эта диаграмма — всего лишь экстравагантный способ утверждения, что $aN \cdot bN = (ab)N$.

Пусть $f: G_1 \rightarrow G_2$ есть некоторый гомоморфизм G_1 на G_2 . Рассмотрим ядро f , т. е. множество таких элементов группы G_1 , которые отображаются в 1_{G_2} . Другими словами, пусть $\ker f = f^{-1}(1_{G_2})$. Определим отношение \sim_f на G_1 , потребовав, чтобы $g \sim_f g' \Leftrightarrow f(g) = f(g')$. Тогда \sim_f есть отношение конгруэнтности; соответствующие классы эквивалентности имеют вид множеств $g \cdot \ker f$, и, следовательно, $\ker f$ является нормальной подгруппой N группы G_1 . Отсюда $G_1/N \cong G_2$. (Подробности этого простого доказательства мы не приводим.) Этот последний результат известен как теорема о гомоморфизмах.

(2.7) Теорема о гомоморфизмах. Если f есть некоторый гомоморфизм G_1 на G_2 , то $G_1/\ker f \cong G_2$.

У каждой группы G имеется по крайней мере две нормальные подгруппы $\{1_G\}$ и G , причем $G/\{1_G\} \cong G$ и $G/G \cong \{1_G\}$.

(2.8) Определение. Группа называется *простой*, если она имеет в точности две нормальные подгруппы.

Таким образом, выше мы установили, что при $n > 4$ каждая группа A_n является простой. Для заданной группы G назовем ряд

$$(2.9) \quad G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_k = \{1_G\}$$

нормальным рядом для G (заметьте, что $G \triangleright H \triangleright K \not\Rightarrow G \triangleright K$).

Любая нормальная подгруппа H группы G содержится в нормальном ряду $G \triangleright H \triangleright \{1_G\}$. Назовем нормальный ряд

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \dots \triangleright H_n = \{1_G\}$$

уплотнением ряда (2.9), если каждое G_i является некоторым H_j . Факторами ряда (2.9) называются факторгруппы G_i/G_{i+1} .

Рассмотрим $Z_K = \{0, \dots, K-1\}$ с определенным в нем сложением по модулю K . Тогда

$$\begin{aligned} Z_6 &\triangleright Z_3 \triangleright \{0\}, \\ Z_6 &\triangleright Z_2 \triangleright \{0\}, \\ Z_6/Z_3 &\cong Z_2/\{0\}, \\ Z_6/Z_2 &\cong Z_3/\{0\}. \end{aligned}$$

Это пример двух нормальных рядов одной и той же группы с одинаковыми факторами, но встречающимися в обратном порядке.

Будем говорить, что два нормальных ряда *изоморфны*, если их факторы можно поставить в такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие факторы окажутся изоморфными.

Композиционным рядом называется нормальный ряд, для которого не существует строгого уплотнения, т. е. который является собственным уплотнением без повторов. Центральный результат, необходимый нам для дальнейшего и доказываемый в § 8.4, содержится в теореме Жордана — Гёльдера.

(2.10) Теорема Жордана — Гёльдера. *Любые два композиционных ряда некоторой группы изоморфны.*

Ясно, что любая конечная группа *должна иметь* композиционный ряд.

Если рассматривать группу как объект, в некотором смысле построенный из факторов ее композиционного ряда, то теорема Жордана — Гёльдера утверждает, что группа G однозначно определяет элементы, из которых ее можно построить. Однако использовать эти блоки для построения группы G можно несколькими различными способами.

Сформулируем теперь несколько основных результатов теории полугрупп и свяжем их с нашей теорией групп и введенным выше понятием делимости. Основная трудность, которая возникает каждый раз, когда мы имеем дело с полугруппами, состоит в том, чтобы удержаться от искушения приписать им свойства, которыми обладают *лишь группы*.

(2.11) Определение. Элемент r полугруппы S называется *левой (правой) единицей*, если при всех $s \in S$ справедливо $rs = s(sr = s)$, *левым (правым) нулем*, если при всех $s \in S$ справедливо $rs = r(sr = r)$, и *идемпотентом*, если $r^2 = r$.

Ясно, что и единицы, и нули всегда являются идемпотентами. Заметим, что в любой группе G нет нулей (если только G не состоит из одного элемента) и есть один идемпотент и правая или левая единицы, совпадающие между собой и равные 1_G .

(2.12) Пример. Рассмотрим две группы G_1 и G_2 . Пусть S есть $G_1 \cup G_2 \cup \{0\}$ с умножением $s \circ s' = ss'$ (групповое умножение), если s и s' принадлежат одной и той же группе G_k и равны 0 в противном случае. Тогда 0 есть левый и правый нуль подгруппы S , а 1_{G_1} и 1_{G_2} — идемпотенты полугруппы S , но S не имеет единиц.

(2.13) Определение. Подмножество A полугруппы S называется *левым (правым) идеалом* полугруппы S , если $SA \subseteq A$ ($AS \subseteq A$). Идеал A называется *собственным*, если $A \neq S$.

Ясно, что A есть подполугруппа полугруппы S : $AA \subset A$ ($SA = \{sa: s \in S, a \in A\}$ и т. д.).

Если r является одновременно левой и правой единицей (нулем) полугруппы S , то это есть единственная левая или правая единица (нуль) S , и тогда этот элемент можно смело обозначать через $1_S(0_S)$. Например, если r есть некоторая правая единица, а r' — некоторая левая единица, то $r' = r'r = r$.

(2.14) **Предложение.** Полугруппа является группой тогда и только тогда, когда у нее нет собственных левых и правых идеалов.

Доказательство. Если S не является группой, то существуют такие a , x и y из S , что $x \neq y$, но $ax = ay^1$). Но это означает, что $\{as: s \in S\}$ есть собственный правый идеал.

Если же \hat{S} есть некоторый собственный правый идеал полугруппы S , то $a \in \hat{S} \Rightarrow aS \subseteq \hat{S}$, и, следовательно, $ax = ay$ для некоторых x и y из S , $x \neq y$, а значит, S не может быть группой.

(2.15) **Предложение.** Любая конечная полугруппа S имеет идемпотент. Более того, для каждого $a \in S$ найдется идемпотент вида a^k .

Эта ситуация заслуживает более тщательного исследования.

(2.16) **Теорема.** Пусть a есть некоторый элемент полугруппы S . Обозначим через $\langle a \rangle$ циклическую подполугруппу полугруппы S , порожденную a , т. е. $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$. Если $\langle a \rangle$ бесконечна, то все степени a различны. Если же $\langle a \rangle$ конечна, то существуют два положительных целых числа, называемых индексом r и периодом m элемента a , таких, что $a^r = a^{r+m}$ и

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{m+r-1}\},$$

где $m + r - 1$ есть порядок $\langle a \rangle$. Множество

$$K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$$

образует циклическую подгруппу полугруппы S порядка m . Если n кратно m и удовлетворяет условию $r \leq n \leq m + r - 1$, то a^n есть идемпотент и единица множества K_a .

Доказательство. Если $a^r = a^s$ для некоторого целого $r < s$, то обозначим через s наименьшее такое s , соответствующее r , а через m разность $s - r$. Требуемый результат легко получается, что видно из рис. 8.4.

¹⁾ Или $xa = xy$, и в этом случае можно воспользоваться точно такими же рассуждениями.

(2.17) **Лемма.** Если G' есть некоторая группа, делящая конечную полугруппу S

$$S \cong S'' \xrightarrow{Z} G',$$

то существует такая группа $G \subseteq S$, что $Z(G) = G'$ (т. е. G' изоморфна группе G).

Доказательство. Поскольку S конечна, всегда можно найти такую подполугруппу S_1 полугруппы S'' , что $Z(S_1) = G'$ и что для каждой собственной подполугруппы S_2 подполугруппы S_1 имеет место $Z(S_2) \neq G'$.

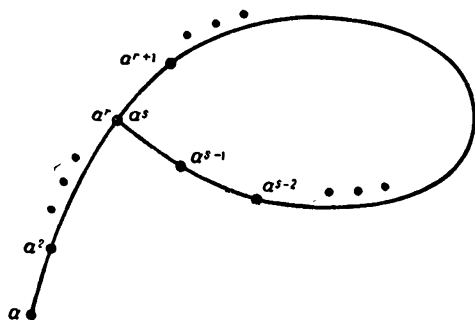


Рис. 8.4.

Покажем, что S_1 не имеет собственных правых или левых идеалов, и поэтому S_1 является искомой группой G . Предположим, что правый идеал $S_2 \subseteq S_1$ существует. Но тогда в S_2 найдется некоторый идемпотент e . А так как $Z(e^2) = Z(e)$, то необходимо, чтобы $Z(e) = 1_{G'}$.

Выберем произвольное $g \in G'$ и некоторое $s \in S_1$, такое, что $Z(s) = g$. Тогда $es \in S_2$, поскольку e принадлежит правому идеалу S_2 . Теперь имеем $Z(es) = Z(e)Z(s) = 1_{G'}g = g$, и, следовательно, $Z(S_2) = G'$; отсюда $S_1 = S_2$. Аналогично доказывается и то, что S_1 не содержит никаких собственных левых идеалов.

8.3 Результаты о неприводимости

Предположим, что в определении каскадного соединения двух автоматов мы потребовали, чтобы было $X = S_2 \times S_1$, $\eta(s_2, s_1) = s_1$, а Z не зависело от s_1 и \tilde{x} , так что вместо $Z((s'_1, s'_2), s_1)$ можно писать $Z_{s_1}(s'_2)$ (рис. 8.5).

Более того, заменим автомат M полугрупповым автоматом $M(S_1)$, а автомат M' — автоматом $M(S_2)$. Тогда имеем

$$\delta_Z[(s_2, s_1), (s'_2, s'_1)] = [s_2 Z_{s_1}(s'_2), s_1, s'_1],$$

и если потребовать, чтобы отображение Z обладало свойствами

$$Z_{s_1 s'_1}(s_2) = Z_{s_1}(Z_{s'_1}(s_2))$$

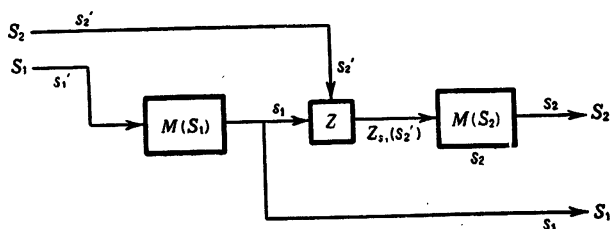
и

$$(s_1, s'_1 \in S_1; s_2, s'_2 \in S_2)$$

$$Z_{s_1}(s_2 s'_2) = Z_{s_1}(s_2) Z_{s_1}(s'_2),$$

то операция δ_Z становится ассоциативной. Таким путем мы, естественно, приходим к определению полупрямого произведения полугрупп S_1 и S_2 .

(3.1) **Определение.** Пусть S_1 и S_2 есть некоторые полугруппы, а Z — гомоморфизм S_1 в $\text{End } S_2$ (моноид эндоморфизмов полугруппы



Р и с. 8.5.

S_2 относительно закона композиции), т. е. $s_1 \mapsto Z_{s_1}(\cdot)$. Тогда *полупрямым произведением полугрупп S_1 и S_2 с гомоморфизмом связи Z* называется полугруппа $S_2 \times_z S_1$, элементами которой служат элементы декартового произведения множеств $S_2 \times S_1$, а умножение определяется условием

$$(s_2, s_1)(s'_2, s'_1) = (s_2 Z_{s_1}(s'_2), s_1 s'_1).$$

(3.2) **Определение.** Полугруппа S называется *неприводимой*, если для всех полупрямых произведений $S_2 \times_z S_1$, таких, что $S | S_2 \times_z S_1$, необходимо, чтобы

$$S | S_2 \text{ или } S | S_1.$$

Последнее определение составлено в таких выражениях, что кажется весьма правдоподобным, что автомат будет s -неприводимым тогда и только тогда, когда неприводима его полугруппа. Однако, как выяснится, доказательство этого утверждения требует все же некоторых усилий.

Если нам задан каскадный автомат $M' \times_z M$ с полугруппой \tilde{S} , то заманчивым кажется считать, что всегда можно найти подходящий гомоморфизм Z , такой, что

$$\tilde{S} | S' \times_z S,$$

где S' есть полугруппа автомата M' , а S — полугруппа автомата M . Однако на самом деле это не всегда так, поскольку исходное отображение Z может разрушать мультипликативную структуру полугруппы, и поэтому ни одно Z не может обладать требуемым свойством гомоморфизмов.

Моделируя M с помощью $M(S)$, а M' — с помощью $M(S')$, мы сможем представить $M' \times_Z M$ схемой, показанной на рис. 8.6.

Пространство состояний (не обязательно приведенное) этого каскадного автомата есть $S' \times S$. Рассмотрим теперь \hat{S} , полугруппу преобразований пространства $S' \times S$, индуцированных входными последовательностями. Пусть t есть некоторая входная последовательность, т. е. элемент множества $(X)^*$. Действие после-

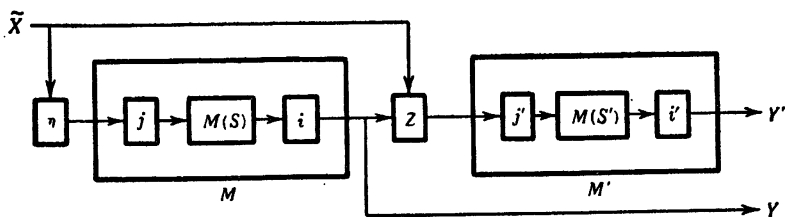


Рис. 8.6.

довательности t на автомат $M(S)$ состоит в простом умножении на соответствующий элемент $I_S(t)$ пространства S . Однако действие t на второй автомат $M(S')$ будет зависеть от состояния автомата $M(S)$ в начале операции. Предположим, что это состояние было s , и обозначим искомое действие через $I_{S'}(t)(s)$. Таким образом, $I_{S'}(t)$ является элементом полугруппы $F(S, S')$ отображений (а не только гомоморфизмов) S в S' с законом композиции вида

$$(f_1 \circ f_2)(s) = f_1(s) \cdot f_2(s).$$

Итак, \hat{S} образуется в результате замены элемента t входной свободной полугруппы на элемент $(I_{S'}(t), I_S(t))$ множества $F(S, S') \times \times S$. Каково же полугрупповое умножение, индуцируемое в этом множестве действием входных последовательностей? Действие последовательности t_1 , за которой идет последовательность t_2 , дает

$$(3.3) \quad (I_{S'}(t_1), I_S(t_1)) \cdot (I_{S'}(t_2), I_S(t_2)) = (I_{S'}(t_1 t_2), I_S(t_1 t_2)).$$

Но действие $t_1 t_2$ на $M(S)$ определяется просто действием t_1 , умноженным на действие t_2 , т. е.

$$(3.4) \quad I_S(t_1 t_2) = I_S(t_1) I_S(t_2),$$

в то время как действие $t_1 t_2$ на $M(S')$ при условии, что в начальный момент автомат $M(S)$ находился в состоянии s , определяется

действием t_1 на $M(S')$ для начального состояния s автомата $M(S)$, умноженным на действие t_2 на $M(S')$ для начального состояния $s \cdot I_S(t_1)$ автомата $M(S)$. Другими словами,

$$(3.5) \quad I_{S'}(t_1 t_2)(s) = [I_{S'}(t_1)(s)] \cdot [I_{S'}(t_2)(s \cdot I_S(t_1))].$$

Вернемся снова к определению полупрямого произведения и рассмотрим отображение

$$W: S \rightarrow \text{End } F(S, S'),$$

удовлетворяющее условию

$$W_{s_1}(I)(s) = I(ss_1).$$

Умножение, определенное на $F(S, S') \times S$, оказывается полупрямым произведением $F(S, S') \times_w S$. Это наводит на мысль, что последняя полугруппа заслуживает специального внимания. Будем называть ее *узловым произведением* S и S' и обозначим через $S'wS$.

Заметим, что для заданных S и S' отображение W однозначно определено и его не обязательно указывать в явном виде.

Мы построили таким образом \hat{S} как полугруппу относительно операции узлового произведения S и S' . Но, поскольку полугруппа автомата $M' \times_z M$ описывает всего лишь действие множества \hat{X}^* на приведенное пространство состояний, эта полугруппа является гомоморфным образом полугруппы \hat{S} . Поэтому имеет место следующий важнейший результат.

(3.6) **Теорема.** Пусть автомату M соответствует полугруппа S , а автомату M' соответствует полугруппа S' . Тогда для любого отображения связи Z полугруппа \hat{S} автомата $M' \times_z M$ делит узловое произведение $S'wS$.

Таким образом, хотя в общем случае не существует полупрямого произведения S' и S , которое делилось бы на \hat{S} , всегда справедливо, что \hat{S} делит одно полупрямое произведение $F(S, S')$ на S , называемое узловым.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы параграфа.

(3.7) **Теорема.** Если автомат M является s -неприводимым, то неприводима и его полугруппа S .

Доказательство. Предположим, что автомат M есть s -неприводимый. Утверждать, что S делит полупрямое произведение $S_2 \times_z (S_1)$, это то же, что утверждать, что автомат $M(S)$ можно моделировать каскадным соединением автоматов $M(S_2) \times_z M(S_1)$. Поскольку $M|M(S)$, сразу видим, что $M|M(S_2) \times_z M(S_1)$, а в силу s -неприводимости автомата M это означает, что $M|M(S_1)$ или $M|M(S_2)$. Но делимость автоматов гарантирует делимость их по-

дугрупп, следовательно, имеем $S|S_1$ или $S|S_2$. Таким образом, полугруппа S неприводима.

(3.8) **Теорема.** Если полугруппа S автомата M неприводима, то автомат M является s -неприводимым.

Доказательство. Пусть полугруппа S неприводима. Теперь если $M|M_2 \times_z M_1$, то полугруппа S должна делить $S_2 w S_1$ и, следовательно, делить S_1 или $F(S_2, S_1)$. Если S делит S_1 , то $M(S)$ делит $M(S_1)$. Но $F(S_2, S_1) \cong S_2 \times \dots \times S_2$, где число сомножителей равно $|S_1|$. Поэтому если S делит $F(S_2, S_1)$, то S в силу неприводимости должно делить S_2 , а значит, $M(S)$ делит $M(S_2)$. Таким образом, имеем $M|M(S_1)$ или $M|M(S_2)$. Доказательство закончено.

Итак, автомат s -неприводим тогда и только тогда, когда неприводима его полугруппа¹⁾. Опираясь на эту теорему, мы сможем доказать утверждение (1.13) в нашей схеме доказательства теоремы Крона — Роудза с помощью двух других теорем, которыми мы и займемся в оставшейся части параграфа.

(3.9) **Теорема.** Простые группы неприводимы.

Доказательство. Пусть G' есть некоторая простая группа. Пусть нам задано, что $G'|S_2 \times_z S_1$. Тогда требуется доказать, что

$$G'|S_2 \text{ или } G'|S_1.$$

Мы уже видели, что можно выбрать такую подгруппу G автомата $S_2 \times_z S_1$, что

$$S_2 \times_z S_1 \geq G \xrightarrow{\varphi} G'.$$

Элементами подгруппы G являются пары (s_2, s_1) , где $s_i \in S_i$. Положим $\pi(s_2, s_1) = s_1$. Тогда π есть некоторый гомоморфизм G в S_1 , и $G_1 = \pi(G)$ есть подгруппа полугруппы S_1 как гомоморфный образ подгруппы G .

Пусть $1 = (1_2, 1_1)$ есть единица подгруппы G . Положим $G'_2 = \{(s_2, 1_1) \in G\}$. Ясно, что G'_2 является подгруппой группы G . На самом же деле, поскольку G'_2 является ядром гомоморфизма π , подгруппа G'_2 есть даже нормальная подгруппа подгруппы G . Определим отображение $\psi: G'_2 \rightarrow S_2$ с помощью условия

$$\psi(s_2, 1_1) = Z_{1_1}(s_2).$$

Покажем прежде всего, что ψ есть гомоморфизм. Поскольку

$$(s_2, 1_1)(s'_2, 1_1) = (s_2 Z_{1_1}(s'_2), 1_1),$$

¹⁾ До сих пор в § 8.3 мы придерживались схемы, использованной в книге Арбиба [1968b], где рассматривается еще и вопрос, почему предложенное определение неприводимости автоматов оказывается связанным с теорией полугрупп. В оставшейся части параграфа мы будем следовать работе Крона и Роудза [1965].

воспользовавшись Z_{1_1} , мы получим, что

$$\begin{aligned} Z_{1_1}(s_2 Z_{1_1}(s'_2), 1_1) &= Z_{1_1}(s_2) Z_{1_1}(Z_{1_1}(s'_2)) = \\ &= Z_{1_1}(s_2) \cdot Z_{1_1}(s'_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем затем, что отображение ψ взаимно однозначно. Если

$$\psi(s_2, 1_1) = \psi(s'_2, 1_1),$$

то

$$\begin{aligned} (s_2, 1_1) &= (1_2, 1_1)(s_2, 1_1) = \\ &= (1_2 Z_{1_1}(s_2), 1_1) = \\ &= (1_2 \psi(s_2, 1_1), 1_1) = \\ &= (s'_2, 1_1), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $G_2 = \psi(G'_2)$. Тогда $G_2 \leq S_2$.

Теперь G' в точности совпадает с гомоморфным образом подгруппы G относительно φ , и группа G' простая, согласно следующему предположению:

$$G' \simeq G/\ker \varphi,$$

так что $K = \ker \varphi$ есть максимальная нормальная подгруппа подгруппы G . Согласно лемме (4.2), если A, B и C есть группы, и $A \triangleleft B$ и $C \triangleleft B$, то $A \cdot C \triangleleft B$. Отсюда следует, что $K \triangleleft K \cdot G'_2 \triangleleft G$, где K максимальна относительно G . Но тогда либо $K = K \cdot G'_2$, либо $K \cdot G'_2 = G$.

В том случае, когда $K = K \cdot G'_2$, покажем, что $G' \mid S_1$. Пусть $G'_1 = \{(1_2, s_1) \in G\}$ и $G = G'_2 \cdot G'_1$. Совершенно очевидно, что здесь $G'_2 \cdot G'_1 \subseteq G$. Пусть (s_2, s_1) есть некоторый элемент G , тогда он принадлежит и $G'_2 \cdot G'_1$, так как

$$\begin{aligned} (s_2, 1_1)(1_2, s_1) &= (s_2 Z_{1_1}(1_2), s_1) = \\ &= (s_2, s_1) \end{aligned}$$

и так как Z есть гомоморфизм. Если определить $P: G_1 \rightarrow G'_1$ условием $P(s_1) = (1_2, s_1)$, то отображение P сюръективно и является гомоморфизмом,

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \varphi(G'_2 \cdot G'_1) &= \varphi(G) = G', \\ \varphi(G'_2 \cdot G'_1) &= \varphi(G'_2) \varphi(G'_1). \end{aligned}$$

Согласно предположению, $K \cdot G'_2 = K_1$, и, следовательно, $G'_2 \leq K$, так что $\varphi(G'_2) = \{1_G\}$. Поэтому φ есть сюръективное отображение

G'_1 на G' , а $\varphi \circ P$ — сюръективное отображение $G_1 \leq S_1$ на G' , откуда следует, что $G' | S_1$.

Если же $K \cdot G'_2 = G$, то $G' | S_2$. Действительно,

$$\begin{aligned} G' &= \varphi(K \cdot G'_2) = \varphi(K) \varphi(G'_2) = \\ &= \varphi(G'_2). \end{aligned}$$

Но ψ^{-1} есть гомоморфизм G_2 на G'_2 , а композиция $\varphi \cdot \psi^{-1}$ есть гомоморфизм G_2 на G' . Доказательство закончено.

(3.10) **Теорема.** *Элементы неприводимы.*

Доказательство. Докажем неприводимость U_3 . Доказательство неприводимости остальных элементов аналогично, но проще.

Прежде всего докажем, что если $U_3 | S$, то $U_3 \subseteq S$. Предположим, что $S \cong S' \xrightarrow{\varphi} U_3$. Пусть $x = \varphi^{-1}(1)$. Тогда найдется такой идемпотент e , который является степенью x , и, следовательно, $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(eS'e) = U_3$, а значит, e есть единица для $eS'e$.

Обозначим через S_1 подполугруппу для $eS'e$ наименьшего порядка, для которой $\varphi(S_1) = U_1$. Но тогда с учетом правой простоты U_1 для каждого $s_1 \in S_1$ справедливо, что $\varphi(s_1 \cdot S_1) = \varphi(s_1)U = U_1$. Поэтому $s_1 \cdot S_1 = S_1$ и, следовательно, S_1 есть правая простая полугруппа.

Согласно теореме 1.27 из монографии Клиффорда и Престона [1961], имеем $S_1 \cong G \times R_B$, где G есть некоторая группа, а R_B есть множество B с определенным в нем умножением справа на нуль. Поскольку U_1 не есть группа, B должно содержать по крайней мере два элемента b_1 и b_2 . Но тогда

$$U_3 \simeq \{e_1(1, b_1), (1, b_2)\} \subseteq S_1 \subseteq S.$$

Покажем теперь, что если $U_3 | S_2 \times_Z S_1$, то U_3 делит либо S_2 , либо S_1 . Согласно выписанному выше, имеем

$$U_3 \simeq \{(b, a), (b_0, a_0), (b_1, a_1)\} \subseteq S_2 \times_Z S_1.$$

Как и раньше, положим, что $\pi_1(s_2, s_1) = s_1$, тогда

$$\pi(U_3) = \{a, a_0, a_1\} \subseteq S_1.$$

Если $a_0 \neq a_1$, то $\pi(U_3) \subseteq S_1$ изоморфно U_3 , откуда имеем $U_3 | S_1$, или

$$\begin{aligned} a &= a_i \quad (i = 0, 1) \Rightarrow Za = Za_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z = a \quad \text{для всех } Z \in \{a, a_0, a_1\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $U_3 \simeq \{b, b_0, b_1\}$.

Если же $a_0 = a_1$, то $b_0 \neq b_1$. Пусть $p_2: U_3 \rightarrow S_2$, где $p_2(b', a') = Z_{a_0}(b')$. Заметим, что $Z_a Z_{a_1} = Z_a Z_a = Z_a$, и убедимся, что p_2 есть

гомоморфизм. Простым перебором возможностей выясним, что p_2 к тому же и взаимно однозначно. Тогда в этом случае имеем $p_2(U_3) \cong U_3$ и $p_2(U_3) \subseteq S_2$, так что $U_3 | S_2$.

8.4 Доказательство теоремы Жордана — Гёльдера

Докажем теперь теорему Жордана — Гёльдера, утверждающую, что композиционные ряды групп единственны с точностью до изоморфизмов. Мы будем следовать при этом доказательству Куроша [1953].

(4.1) Лемма. Если $B \leq C$ и $A \triangleleft C$, то $AB \leq C$.

Доказательство. Пусть A нормальна, и для всех $c \in C$ справедливо, что $c^{-1}Ac = A$. Пусть $\alpha, \beta \in AB$. Требуется доказать, что $\alpha\beta^{-1} \in AB$. Но если $\alpha = a_1b_1$, $\beta = a_2b_2$, $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$, то

$$\alpha\beta^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1}.$$

Выберем $a_3 \in A$, так чтобы $a_3(b_1b_2^{-1}) = (b_1b_2^{-1})a_2^{-1}$. Тогда

$$\alpha\beta^{-1} = (a_1a_3)(b_1b_2^{-1}) \in AB.$$

Аналогичным образом можно доказать еще одну лемму.

(4.2) Лемма. Если $B \triangleleft C$ и $A \triangleleft C$, то $AB \triangleleft C$.

(4.3) Лемма Цассенхауза. Если A, A', B и B' есть подгруппы группы G , причем $A' \leq A$ и $B' \leq B$, то

$$A'(A \cap B') \triangleleft A'(A \cap B),$$

$$B'(B \cap A') \triangleleft B'(B \cap A),$$

и соответствующие факторгруппы изоморфны:

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') \simeq B'(B \cap A)/B'(B \cap A').$$

Доказательство. Если $C = A \cap B$, а $D = (A \cap B')(B \cap A')$, то ясно, что $D \subseteq C$. Более того, поскольку подгруппа B' нормальна относительно B , а C есть подгруппа подгруппы B , легко видеть, что $C \cap B' = A \cap B \cap B' = A \cap B'$ есть нормальная подгруппа подгруппы C .

Из-за симметрии условий леммы относительно A и B аналогичное утверждение справедливо и для пересечения $B \cap A'$. А так как произведение нормальных подгрупп само есть нормальная подгруппа, то это справедливо и относительно D . Поэтому можно говорить о факторгруппе C по D . Обозначим ее через

$$H = C/D.$$

Но с другой стороны, A' есть нормальная подгруппа подгруппы A , так что $A'(A \cap B) = A'C$ есть подгруппа.

Каждый элемент группы $A'C$ имеет вид $a's$, где $a' \in A'$, а $s \in C$. Если сопоставить ему класс смежности $Ds \in H$ и если $a's$ допускает другое представление того же вида

$$a's = a'_1c_1,$$

то $(a'_1)^{-1}a' = c_1c^{-1} \in (A' \cap C) \subseteq A' \cap B \subseteq D$ и, следовательно, $c_1 = ((a'_1)^{-1}a')c \in Ds$. Таким образом, мы построили однозначное отображение f группы $A'C$ на группу H , поскольку каждый элемент $s \in C$ отображается на свой класс смежности Ds . Отображение f гомоморфно. Действительно, поскольку A' есть нормальная подгруппа группы $A'C$, справедливо, что $a'_1c_1a'_2c_2 = a'_3(c_1c_2)$, где $a'_3 \in A'$ (фактически $a'_3 = a_1a'_4$, где a'_4 выбирается так, чтобы $c_1^{-1}a'_4c_1 = a'_2$). Очевидно, что $\ker f$ должно содержать подгруппу $A'(A \cap B')$. Мы знаем, кроме того, что

$$A \cap B' = C \cap B' \subseteq D.$$

Но с другой стороны, если элемент $a's$ переводится отображением f в D , то $s \in D$, т. е. $s = uv$, где $u \in (B \cap A')$, а $v \in (A \cap B')$. Тогда имеем

$$a's = a'uv = a'_1v \in A'(A \cap B'),$$

и, следовательно, ядро f совпадает с подгруппой $A'(A \cap B')$. Но отсюда, согласно теореме о гомоморфизмах, находим

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') \simeq H.$$

По симметрии получаем также и изоморфизм

$$B'(B \cap A)/B'(B \cap A') \simeq H.$$

(4.4) Теорема Шрейера. Любые два нормальных ряда произвольной группы обладают изоморфными уплотнениями.

Доказательство. Пусть

$$(4.5) \quad G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_k = \{1_G\},$$

$$(4.6) \quad G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \dots \triangleright H_l = \{1_G\}$$

есть два нормальных ряда группы G . Положим

$$G_{ij} = G_i(G_{i-1} \cap H_j),$$

$$H_{ij} = H_j(H_{j-1} \cap G_i).$$

Здесь G_{ij} и H_{ij} есть группы, поскольку, например, G_i является нормальной подгруппой, а $G_{i-1} \cap H_j$ есть подгруппа подгруппы G_{i-1} .

Теперь для $i = 1, 2, \dots, k$ и $j = 1, 2, \dots, l$ имеем

$$G_{i-1} = G_{i0} \geq G_{i, j-1} \geq G_{ij} \geq G_{ij} = G_i,$$

$$H_{j-1} = H_{0j} \geq H_{i-1, j} \geq H_{ij} \geq G_{kj} = H_j.$$

Но в силу леммы Цассенхауза $G_{ij} \triangleleft G_{i, j-1}$ и $H_{ij} \triangleleft H_{i-1, j}$, а также

$$G_{i, j-1}/G_{ij} \simeq H_{i-1, j}/H_{ij}.$$

(Для того чтобы убедиться в этом, нужно положить $A = G_{i-1}$, $A' = G_i$, $B = H_{j-1}$ и $B' = H_j$.)

Если теперь подставить в ряд (4.5) все подгруппы G_{ij} , $j = 1, 2, \dots, l-1$, между G_{i-1} и G_i , $i = 1, 2, \dots, k$, то мы получим уплотнение этого ряда, которое в общем случае представляет собой нормальный ряд с повторениями, так как некоторые подгруппы $G_{i, j-1}$ и G_{ij} могут совпадать. Аналогичным образом строится и уплотнение ряда (4.6). Предоставим читателю в качестве упражнения доказать, что два новых нормальных ряда изоморфны, даже если убрать повторы.

Отсюда сразу следует справедливость теоремы Жордана — Гёльдера.

(4.7) Теорема Жордана — Гёльдера. Любые два композиционных ряда некоторой группы изоморфны.

Ясно, что у каждой конечной группы обязательно имеется композиционный ряд.

(4.8) Упражнение. Покажите, что если нормальный ряд является и композиционным, то каждый его фактор является простым, и наоборот.

Решение. Самое основное здесь — это вспомнить следующую лемму:

$$A \triangleright B \triangleright C \text{ и } A \triangleright C \Rightarrow A/C \triangleright B/C.$$

Поэтому если $G_k \triangleright G_{k+1}$ можно нетривиальным образом уплотнить, вставив некоторое H , такое, что $G_k \not\supset H \not\supset G_{k+1}$, то мы немедленно получим, что $G_k/G_{k+1} \not\supset H/G_{k+1} \not\supset 1$. Отсюда следует, что G_k/G_{k+1} не может быть простой. Обратно, если $G_k/G_{k+1} \not\supset K \not\supset 1$, и $G_k \xrightarrow[\text{каноническое}]{h} G_k/G_{k+1}$, то легко видеть, что $G_k \not\supset h^{-1}(K) \not\supset G_{k+1}$.

(4.9) Упражнение. Покажите, что если P есть некоторый фактор композиционного ряда группы G , то P является простым и, кроме того, $P \mid G$.

Доказательство. Имеем $P = G_k/G_{k+1}$, и он является простым, согласно результату упражнения (4.8). Кроме того, $P \mid G$, поскольку

$$G \geq G_k \xrightarrow{\eta} G_k/G_{k+1} = P,$$

где η есть каноническое отображение $\eta(g) = gG_{k+1}$.

Однако обратное утверждение неверно, так как у *простой* группы могут быть нетривиальные (хотя и ненормальные) подгруппы. Другими словами, если A_n есть знакопеременная группа подстановок из n символов, а A_3 и A_5 являются простыми, то $A_3 \mid A_5$.

9 Доказательство теорем о декомпозиции конечных автоматов

В этой главе мы на практике осуществим шаги, намеченные ранее, и покажем, что любой автомат может быть построен с помощью каскадных соединений триггеров и автоматов, полугруппы которых являются простыми группами, делящими полугруппу исходного автомата.

9.1 Декомпозиция *PR*-автоматов

(1.1) **Лемма.** Для заданных группы G и нормальной подгруппы H можно построить автомат $M(G)$ в виде каскадного соединения автоматов $M(H)$ и $M(G/H)$.

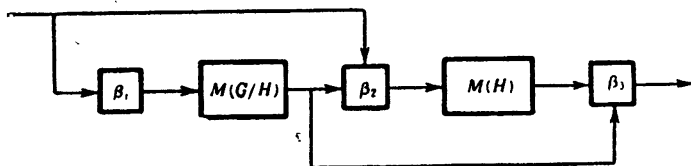


Рис. 9.1.

Доказательство. Рассмотрим каскадный автомат, показанный на рис. 9.1. Для каждого g из G выберем $g' \in G$ так, что $Hg_1 = Hg_2 \Rightarrow g'_1 = g'_2$ и $Hg'_1 = Hg_1$, т. е. так, чтобы g' было некоторым представителем смежного класса. Пусть

$$\beta_1: G \rightarrow G/H, \quad \text{так что } g \mapsto Hg,$$

$$\beta_2: G \times G/H \rightarrow H, \quad \text{так что } [g_2, Hg'_1] \mapsto g'_1 g_2 [(g'_1 g_2)^{-1}],$$

$$\beta_3: G/H \times H \rightarrow G, \quad \text{так что } [Hg', h] \mapsto hg'.$$

Тогда если в момент времени t входное воздействие равно g_2 , а выходная величина есть g_1 , то в момент времени $t + 1$ выходная величина окажется равной $g_1 \cdot g_2$.

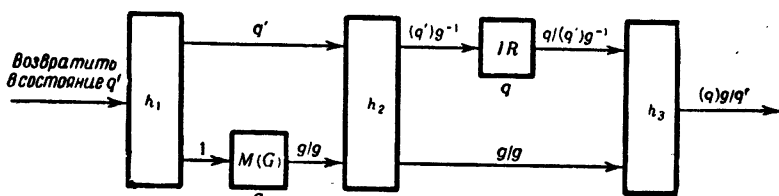
(1.2) **Следствие.** Если G есть некоторая группа, то автомат $M(G)$ можно получить в виде каскадного соединения композиционных

факторов группы G , а значит, тем более и из простых делителей $(G) = \{P: P|G, P \text{ есть простая группа}\}$.

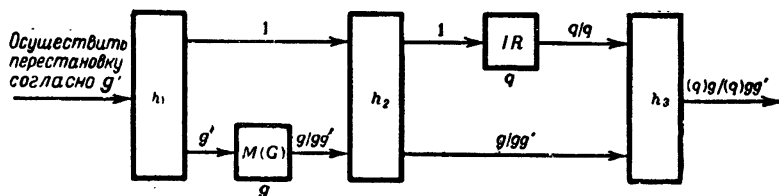
Доказательство. Утверждение следует по индукции из леммы (1.1). Действительно, предположим, что

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{k-1} \triangleright G_k = \{1\}$$

представляет собой некоторый композиционный ряд для группы G . Тогда приведенная лемма позволяет построить автомат $M(G_{k-1})$ из $M(G_{k-1}/G_k)$ и $M(G_k)$, автомат $M(G_{k-2})$ из $M(G_{k-2}/G_{k-1})$ и $M(G_{k-1})$ и т. д. до тех пор, пока мы не построим автомат $M(G)$ из автоматов, соответствующих его факторам.



Р и с. 9.2.



Р и с. 9.3.

Следующая задача состоит в том, чтобы осуществить декомпозицию *PR*-автоматов (т. е. перестановочно-возвратных автоматов). Напомним, что входное воздействие x для *PR*-автомата либо осуществляет перестановку его состояний, либо отображает каждое состояние в единственное состояние q_x , зависящее лишь от входного воздействия («возврат» в состояние q_x). Перестановочные отображения порождают группу *PR*-автоматов.

(1.3) **Лемма.** Если M есть некоторый *PR*-автомат с группой перестановок G , то автомат M можно построить без петель из автомата $M(G)$ и тождественно-возвратного автомата с тем же пространством состояний, что и у автомата M .

Доказательство. Конструкция, реализующая автомат M , показана в ее двух типичных режимах работы; при доказательстве мы снова, как и раньше, воспользуемся схемами (см. рис. 9.2, 9.3).

Квадратик с буквами IR соответствует тождественно-возвратному автомату с пространством состояний Q , таким же, как и у автомата M . Его нейтральное входное воздействие обозначается через 1 , а входное воздействие $q \neq 1$ возвращает его в состояние q . Через $M(G)$ обозначен автомат для группы G . Действие $g \in G$ на $q \in Q$ обозначается через $(g)q$. Далее:

h_1 кодирует воздействие «возвратиться в состояние q » как $(q, 1)$, а воздействие «воспользоваться перестановочным отображением g » как $(1, g)$;

h_2 кодирует $(1, g)$ как $(1, g)$; но для $q \neq 1$ кодирует (q, g) как $((q)g^{-1}, g)$;

h_3 кодирует (q, g) как $(q)g$, и именно выходная величина h_3 служит моделью состояния автомата M .

Для того чтобы возвратиться в состояние q' при условии, что вначале автомат $M(G)$ находился в состоянии g , а IR находился в состоянии q (что соответствует, таким образом, состоянию $(q)g$ автомата M), мы имеем действие, показанное на рис. 9.2. Такое довольно сложное действие требуется потому, что мы не можем вернуть автомат $M(G)$ в состояние 1 , не воспользовавшись петлями.

Для того чтобы осуществить перестановочное воздействие g' , у нас имеется действие, показанное на рис. 9.3.

9.2 Доказательство теоремы о декомпозиции с помощью теории полугрупп

(2.1) *Теорема. Любой автомат с полугруппой S может быть представлен каскадным соединением триггеров и автоматов простых групп, делящих S .*

Оригинальное доказательство этого утверждения, принадлежащее Крону и Роудзу [1965], базировалось на важнейшей лемме, которую мы докажем здесь новым элементарным способом.

(2.2) *Лемма. Пусть S есть некоторая конечная полугруппа. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

- (а) *полугруппа S циклическая;*
- (б) *полугруппа S левопростая (т. е. у S нет собственных левых идеалов);*
- (с) *существуют такой собственный левый идеал T и собственная подполугруппа V полугруппы S , что $S = T \cup V$.*

Доказательство. Если условие (б) не выполняется, то мы можем найти максимальный собственный левый идеал T полугруппы S . Предположим, что существует такое $s \in S$, что $Ts \subseteq T$. Тогда $Ts \cup T$ является левым идеалом, собственной частью которого служит T , так что $Ts \cup T$ должно совпадать с S . Но $V = Ts$ является подполугруппой.

Если же условие (b) выполняется, то $Ts \subseteq T$ при всех $s \in S$ и, следовательно, T является двусторонним идеалом полугруппы S . Но тогда либо $S - T$ является подполугруппой и мы получили то, что нам требуется, либо можно найти такие $a, b \in S - T$, что $ab \in T$. Но тогда $T' = Sb \cup T$ есть левый идеал. Это собственный идеал, поскольку $\#(T') \leq \#[(S - T - a)b] + \#T \leq \#S - 1$ и это должно быть равно T . Тогда $sb \subseteq T$, а так как $b \cup T$ есть левый идеал, то $\{b\} = S - T$. Но тогда либо $\langle b \rangle = S$, и это соответствует выполнению условия (a), либо можно положить $V = \langle b \rangle$ и доказать тем самым выполнение условия (c).

Приведенная лемма кладется в основу доказательства теоремы (2.1) методом индукции по числу элементов S .

Для того чтобы воспользоваться индукцией, Крон и Роудз заметили, что теорема (2.1) тривиальна, если $\#S = 1$. Затем они доказали следующие леммы.

(2.3) **Лемма.** Если полугруппа S циклическая, то утверждение (2.1) для S справедливо.

(2.4) **Лемма.** Если полугруппа S левопростая, то утверждение (2.1) для S справедливо.

Затем они внесли два изменения в определение автомата $M(f)$.

(2.5) **Определение.** Пусть $f: X^* \rightarrow Y$, а $c \notin X \cup Y$. Тогда частичным произведением f , PPf , называется автомат $M(f)$, пополненный таким образом, чтобы входное воздействие c «возвращало автомат в исходное состояние». Точнее говоря, $PPf: (X \cup c)^* \rightarrow Y \cup c$ и удовлетворяет условию $x = x_1cx_2$, $x_2 \in X^* \Rightarrow PPf(x) = f(x_2)$ и $PPf(x) = f(x)$ для $x \in X^*$.

(2.6) **Определение.** Пусть $f: X^* \rightarrow Y$, а $e \notin X \cup Y$. Тогда ef совпадает с автоматом $M(f)$, измененным таким образом, чтобы входное воздействие e служило для «сохранения» действия. Точнее говоря, $ef: (X \cup e)^* \rightarrow Y \cup e$ и удовлетворяет условиям

$$x = x_1ex_2 \dots ex_k \text{ для каждого } x_j \in X^* \Rightarrow ef(x) = f(x_1x_2 \dots x_k)$$

и

$$ef(x) = f(x) \text{ при } x \in X^*.$$

Затем они доказали следующие леммы.

(2.7) **Лемма.** Если S есть некоторая конечная полугруппа с собственным левым идеалом T и собственной подполугруппой V , такими, что $S = TUV$, то автомат S можно построить в виде каскадного соединения триггеров и автоматов ef_T и PPf_v , где f_T есть функция автомата $M(T)$ и т. д.

(2.8) **Лемма.** Если для S справедливо утверждение (2.1), то автоматы $PP[S]$ и ef_S можно построить в виде каскадных соединений триггеров и автоматов простых групп, делящих S .

Предположим теперь, что утверждение (2.1) справедливо для любых полугрупп с числом элементов $\leq n$. Пусть $\#S = n + 1$. Если полугруппа S левопростая или циклическая, то мы уже знаем, что утверждение (2.1) верно для S . В оставшемся же случае нужно воспользоваться двумя последними леммами и показать, что утверждение (2.1) справедливо для S , заметив, что $\#T \leq n$, $\#V \leq n$ и

$$\{\text{простые делители } (T)\} \cup \{\text{простые делители } (V)\} \subseteq \\ \subseteq \{\text{простые делители } (S)\}.$$

Последние четыре леммы, формулировки которых имеются в несколько измененном виде в работе Крона и Роудза [1965], представляем доказать читателю в качестве упражнений!

Если задана некоторая полугруппа S , то, обратив ее операцию произведения, мы получим новую полугруппу \bar{S} . Это позволит нам доказать на базе леммы (2.2) ей двойственную.

(2.9) **Следствие.** Пусть S есть некоторая конечная полугруппа. Тогда выполняется одно из следующих условий:

- (a) полугруппа S циклическая;
- (b) полугруппа S правопростая;
- (c) существуют такие собственный правый идеал T и правильная подполугруппа V полугруппы S , что $S = T \cup V$.

Зейгер [1967] недавно получил другое доказательство теоремы о декомпозиции, основное отличие которого состоит в замене лемм (2.7) и (2.8) следующей теоремой.

(2.10) **Теорема.** Пусть M — автомат с полугруппой $S = T \cup V$, где T есть собственный правый идеал, а V есть собственная подполугруппа полугруппы S . Тогда при условии, что $Q \cdot T = Q$, автомат M можно моделировать каскадным соединением автомата M_1 с полугруппой S_1 и автомата M_2 с полугруппой S_2 , где

$$S_1 | V \cup \{\text{возвратные воздействия}\}, \\ S_2 | T \cup \{\text{нейтральные воздействия}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим схему, приведенную на рис. 9.4. Пространство состояний автомата M_1 есть T , а автомата M_2 есть Q и совпадает с пространством состояний автомата M . Если рассматриваемый каскадный автомат находится в состоянии $(p, r) \in T \times Q$, то его выходная величина есть $\gamma(p, r) = r \cdot p$. Входной алфавит совпадает с S . Если входное воздействие u принадлежит T , то

$$\eta(u) \text{ равно возвращению в } u, \quad Z_p(u) = p.$$

Если же $u \notin T$, то

$$\eta(u) = u, \quad Z_p(u) = 1.$$

И в том, и в другом случае следующее состояние моделирует $(r \cdot p) \cdot u$:

$$\text{если } u \notin T, \text{ то } \gamma(p \cdot u, r) = r \cdot (p \cdot u),$$

$$\text{если } u \in T, \text{ то } \gamma(u, r \cdot p) = (r \cdot p) \cdot u.$$

Таким образом, $S_1 | V \cup \{\text{возвратные воздействия}\}$, а $S_2 | T \cup \{1\}$, что и завершает доказательство.

Для того чтобы воспользоваться этим и аналогичными результатами в случае, когда $Q \cdot T \neq Q$, и доказать требуемую теорему о декомпозиции, придется прибегать к двойной индукции точно так же, как нельзя основывать доказательства по индукции лишь на одной лемме (2.7), не прибегая к лемме (2.8). Внимательный читатель легко заметит, что лемма (2.7) и теорема (2.10) практически эквивалентны.

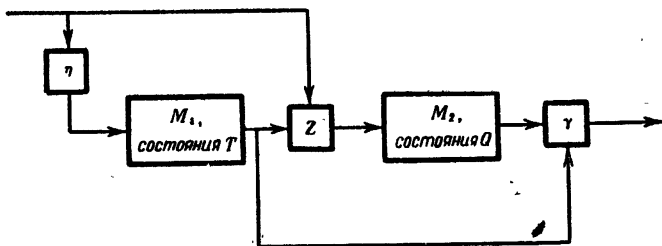


Рис. 9.4.

Полное доказательство теоремы о декомпозиции, построенное по этой схеме, можно найти в работе Арбиба [1969]. Здесь же мы воспользуемся другим методом, который принадлежит Зейгеру и основан на аппарате «теории покрытий».

9.3 Декомпозиции с помощью «покрытий»

Прежде чем переходить к декомпозициям Зейгера на PR -автоматы, обсудим метод декомпозиции с помощью «покрытий» — процесс, чаще всего связываемый с работами Хартманиса и Стирнза [1966].

Если C есть некоторое семейство подмножеств множества Q , то через $\max C$ обозначается множество всех элементов семейства C , максимальных относительно операций включения множеств

$$x, x' \in C, x \subset x' \Rightarrow x \notin \max C.$$

Обозначим через E_A тождественное отображение множества A в себя.

Пусть S есть полугруппа преобразований множества Q . Тогда \hat{S} называют *расширенной полугруппой* преобразований множества Q , если к S добавлено E_Q и такие возвратные отображения $\omega_q (q \in Q)$, что $\omega_q(Q) = \{q\}$.

Для автомата N и $x \in X_N^*$ введем обозначения

$$x_N(\cdot) = \lambda_N(\cdot, x): Q_N \rightarrow Q_N.$$

Преобразование состояние — выход по-прежнему обозначаем через

$$\beta_N: Q_N \rightarrow Y_N.$$

Пусть теперь для автомата M через \hat{S}_M обозначена полугруппа функций $x_M: Q_M \rightarrow Q_M$, где $x \in X_M^*$.

(3.1) **Определение.** *Покрытием S автомата M называется некоторое непустое семейство таких непустых подмножеств множества Q_M , что для каждого $\omega \in \hat{S}_M$ и $R \in C$ имеет место $\omega(R) \subseteq R' \in C$ (т. е. существует такое R' , что $\omega(R) \subseteq R' \in C$). (Заметим, что S действительно покрывает все множество, поскольку \hat{S}_M содержит все возвратные отображения.)*

Приведенное определение утверждает, что для заданных $R \in C$ и $x \in X^*$ удастся найти такое $R' \in C$ (зависящее от x и R), что $q \in R \Rightarrow x_M(q) \in R'$, независимо от выбора q из R .

Если S есть некоторое покрытие автомата M , а N есть некоторый автомат, то выражение « N указывает на положение M в S » означает, что

$$X_N = X_M \text{ и } \beta_N \text{ отображает } Q_N \text{ на } C.$$

Для каждого $x \in X_M$ и каждого $q \in Q_N$ имеет место $x_M(\beta_N(q)) \subseteq \beta_N(x_M(q))$, так что N следит за тем, как входные воздействия автомата M перемещаются по клеткам покрытия S , рассматриваемым как подмножества множества Q_M , но автомат N не обязательно говорит нам что-нибудь о том, как отдельные состояния передвигаются внутри клеток покрытия S .

Для заданных автомата M и его покрытия S можно определить автомат N , сообщающий положение автомата M в покрытии S , потребовав просто, чтобы имело место

$$X_M = X_N,$$

$$C = Q_N = Y_N,$$

$$\beta_N(R) = R,$$

а для каждого $R \in C$ и $x \in X_N = X_M$, потребовав, чтобы $x_N(R)$ было некоторым элементом покрытия S , содержащим $x_M(R) = \{x_M(q): q \in R\}$. Согласно определению покрытия, такой выбор всегда возможен.

Пусть теперь C' есть некоторое измельчение покрытия C , т. е. из того, что $R' \in C'$, следует, что найдется такое $R \in C$, что $R \supseteq R'$. Мы будем называть C' собственным измельчением покрытия C , если число его элементов меньше, чем у C , или если по крайней мере один элемент из C' является собственным подмножеством некоторого элемента из C . Как и раньше, мы сможем найти автомат N' , который будет сообщать нам положение автомата M в C' . Важно отметить, что автомат N' можно построить в виде соединения без петель автомата N и некоторого нового автомата L .

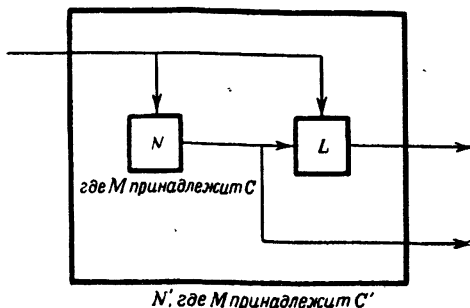


Рис. 9.5.

Задача автомата L состоит в том, чтобы поставлять дополнительную информацию, уточняющую, в каком принадлежащем C' подмножестве множества R , принадлежащего покрытию C , находится автомат M (см. рис. 9.5).

Для заданного элемента R покрытия C перенумеруем его принадлежащие измельчению C' подмножества каким-либо произвольным способом, например, как $R_1, R_2, \dots, R_{j(R)}$, где каждое $R_i \in C'$.

Пусть

$$\rho = \max \{j(R) : R \in C\} \geq 1,$$

и пусть

$$X_L = X_M \times Y_N,$$

$$Q_L = Y_L = \{1, \dots, \rho\},$$

$$\beta_L(i) = i.$$

Композиция автоматов N и L должна указать нам положение автомата M в C' , так что, если выходная величина автомата N равна R , то выходная величина L должна быть i , и это должно означать, что текущее состояние автомата M принадлежит элементу R_i из C' . Теперь уже ясно, что всегда можно определить $x_L(\cdot) = \lambda_L(\cdot, x)$ так, чтобы удовлетворить этому требованию.

В частности, если C' покрывает множество Q_M множествами, содержащими каждое ровно один элемент, можно заключить, что для

заданного произвольного покрытия C автомата M и заданного автомата K , сообщающего положение автомата M в C , автомат K можно дополнить без петель таким автоматом $M_?$, что получится новый автомат, моделирующий автомат M (см. рис. 9.6). Если

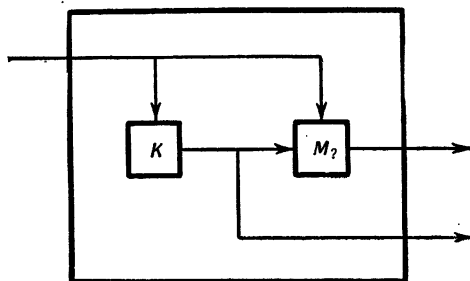


Рис. 9.6.

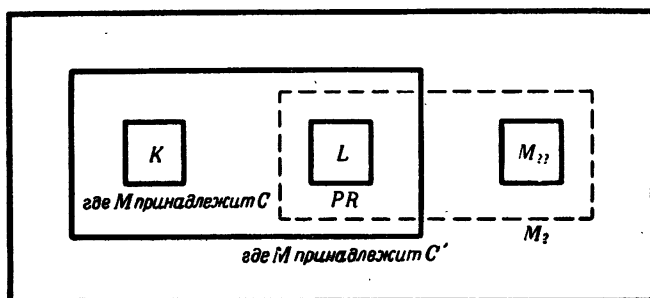


Рис. 9.7.

теперь измельчить покрытие C и получить C' , то мы сможем разбить автомат $M_?$ на два блока L и $M_{??}$, таких, что автомат K вместе с блоком L будут сообщать нам положение автомата M в C' , а автомат $M_{??}$ будет поставлять оставшуюся информацию, необходимую для того, чтобы полностью моделировать автомат M (см. рис. 9.7).

9.4 Декомпозиция на PR -автоматы

Следующая теорема, принадлежащая Зейгеру [1965], показывает, что измельчение C' всегда можно выбрать так, чтобы в действительности автомат L оказался PR -автоматом, группа которого делит полугруппу автомата M .

(4.1) **Теорема.** Пусть M есть некоторый автомат, C — покрытие автомата M , некоторые множества которого содержат более одного

элемента, а K — автомат, сообщающий положение автомата M в C . Тогда существуют такие автоматы N и L и такое покрытие C' автомата M , что

- (a) покрытие C' является собственным измельчением покрытия C ;
- (b) автомат N сообщает положение автомата M в C' ;
- (c) автомат N представляет собой каскадное соединение автоматов K и L ;
- (d) автомат L является PR-автоматом;
- (e) существует такое $R \subseteq Q_M$, что группа перестановок в S_L является гомоморфным образом множества $\{\omega E_R: \omega \in \hat{S}_M \text{ и } \omega E_R \text{ есть перестановка в } R\}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим некоторые ее следствия. Рассмотрим случай, когда C состоит из единственного множества Q_M . Тогда автомат K из теоремы (4.1) может быть автоматом с одним состоянием. Но это означает, что можно не обращать внимания на автомат K и рассматривать автоматы N и L как тождественные. Отсюда сразу получается следующий результат.

(4.2) Следствие. Существуют такое нетривиальное покрытие C' автомата M и такой PR-автомат L , сообщающий положение автомата M в C' , что найдется $R \subseteq Q_M$, для которого группа перестановок в S_L является гомоморфным образом множества $\{\omega E_R: \omega \in \hat{S}_M \text{ и } \omega E_R \text{ есть некоторая перестановка}\}$.

Воспользовавшись один раз этим следствием, а затем последовательно меняя теорему (4.1), мы построим последовательность покрытий $C', C'', \dots, C^{(k)}, \dots$ и соответствующую последовательность PR-автоматов $L^{(k)}$, таких, что групповая часть полугруппы $L^{(k)}$ всегда делит полугруппу автомата M , и таких, что мы сможем построить автомат $M^{(k)}$, который сообщает положение автомата M в $C^{(k)}$ и построен без циклов из автоматов $L', L'', \dots, L^{(k)}$. Такой процесс измельчения покрытий заканчивается только тогда, когда мы дойдем до такого n , что $C^{(n)}$ будет состоять лишь из одноэлементных множеств; при этом всегда найдется такое n , что последнее условие будет выполнено. Соответствующий автомат $M^{(n)}$ сообщает положение автомата M в $C^{(n)}$, но так как все множества покрытия $C^{(n)}$ состоят из единственного элемента, в действительности автомат $M^{(n)}$ моделирует автомат M . Приведенное рассуждение доказывает следующий результат.

(4.3) Предложение. Любой автомат M можно построить в виде каскадного соединения PR-автоматов, группы которых делят полугруппу автомата M .

Будем называть элементы R_1 и R_2 покрытия C автомата M подобными, $R_1 \sim R_2$, если существуют такие $\omega_1, \omega_2 \in \hat{S}_M$, что

$R_1 = w_1(R_2)$ и $R_2 = w_2(R_1)$. Ясно, что это отношение подобия представляет собой отношение эквивалентности и что покрытие C можно, таким образом, разложить на классы подобия.

Будем называть элемент $R \in C$ *начальным*, если каждый раз, когда $R = w(R')$ для некоторого $R' \in C$ и $w \in \hat{S}_M$, справедливо $R \sim R'$ и если, кроме того, ни в одном множестве покрытия C не содержится большего числа элементов. Легко показать, что если $R \sim R'$ и R есть начальное множество, то начальным будет и множество R' . Будем называть *начальным классом* любой класс подобия, состоящий из начальных множеств. Поскольку покрытие C конечно, то в нем имеется по крайней мере один начальный класс (если предположить противное, то это приведет к построению бесконечной регрессии «предков» и противоречию).

Заметим, что если некоторое начальное множество R из C содержит лишь один элемент, то все множества C содержат не более одного элемента, так как некоторое возвратное воздействие отображает *любой* элемент покрытия C на R , но R начально и, следовательно, должно быть подобно всем остальным множествам R . Но $w \in \hat{S}_M$ может отобразить R на некоторое множество только тогда, когда это последнее состоит лишь из одного элемента.

Поэтому, если имеется некоторое покрытие C и некоторые множества из этого покрытия содержат более одного элемента, всегда можно выбрать некоторый начальный класс D из C , все члены которого содержат по крайней мере два элемента. Образует тогда

$$C' = C_1 \cup C_2,$$

где $C_1 = C - D$, и

$$C_2 = \bigcup_{R \in D} \max \{ \{Hw : H \in C, w \in \hat{S}_M, Hw \subset R\} - \{R\} \}.$$

Семейство C' является покрытием автомата M , так как для каждого блока H из C' и каждого $w \in \hat{S}_M$ множество $w(H)$ включается либо в некоторый блок $C - D$, либо в некоторое подмножество такого блока D , которое окажется включенным в некоторый блок C_2 ¹⁾. Заметим, что $R \in D$ может быть образом (сюръективного отображения) лишь некоторого блока $R' \in D$, но *все* такие блоки отбрасываются. Покрытие C' является собственным измельчением покрытия C , поскольку блоки из D покрытия C «заменены» в C' более мелкими. Приведенные рассуждения показывают, почему, определяя C' , мы не взяли в качестве D некоторое произвольное подмножество покрытия C , а потребовали, чтобы оно состояло из начальных элементов. Итак, мы построили измельчение C' по-

¹⁾ Это определение покрытия C' взято из работы Зейгера [1968], где исправляется ошибка, допущенная в работе Зейгера [1965]; см. также монографию А. Гинзбурга [1966].

крытия C . Остается убедиться в том, что мы можем выбрать «корректирующий» автомат L так, чтобы он удовлетворял условиям (d) и (e) теоремы (4.1). Но прежде всего нам потребуется один промежуточный результат.

(4.4) **Лемма.** Если $P, R \in D$, то существуют такие отображения v_P^R и $v_R^P \in \hat{S}_M$, что отображения $v_P^R E_P$ и $v_R^P E_R$ являются взаимно обратными.

Доказательство. Поскольку P и R подобны, всегда найдутся такие w и $y \in \hat{S}_M$, что $w(P) = R$ и $y(R) = P$. Отсюда $yw(P) = P$ и $wy(R) = R$. Таким образом, отображения yw и wy являются перестановочными, но нет никаких причин ожидать, что эти отображения взаимно обратны. Однако всегда можно найти такие целые n и m , что $(yw)^n E_P = E_P$ и $(wy)^{nm} E_R = E_R$, так как некоторая степень перестановочного отображения всегда оказывается тождественным преобразованием. Пусть теперь $v_P^R = w$, а $v_R^P = (yw)^{nm-1} y$. Легко видеть, что они взаимно обратны. Лемма доказана.

Наконец, мы вплотную приблизились к цели и можем заняться построением автоматов N и L . Пусть $D = \{R_0, R_1, \dots, R_{k-1}\}$. Для каждого $R_j \in D$ выберем отображения $v_{R_0}^{R_j}$ и $v_{R_j}^{R_0}$, удовлетворяющие условиям леммы, и будем придерживаться этого выбора и в будущем. Пусть

$$B_j = \{H \in C': H \subset R_j\}.$$

Выберем теперь в качестве пространства состояний Q_L автомата L множество B_0 , т. е. сконструируем его из таких «кусочков» класса D , которые содержат R_0 . Покажем теперь, что сделанный выбор отображений $v_{R_0}^{R_j}$ и $v_{R_j}^{R_0}$ позволяет приписывать эти кусочки также и другим элементам R_j класса D . Иначе говоря, сделанный выбор $v_{R_0}^{R_j}$ и $v_{R_j}^{R_0}$ позволяет ввести внутри каждого элемента класса D единую систему координат, в качестве которой служит пространство состояний L . Следующая лемма заимствована из книги А. Гинзбурга [1966].

(4.5) **Лемма.** Мощность всех блоков B_j одинакова (обозначим ее через α). Кроме того, блоки B_j можно обозначить через H_{j1}, \dots, H_{ja} так, чтобы

$$v_{R_0}^{R_j}(H_{0p}) = H_{jp} \quad \text{и} \quad v_{R_j}^{R_0}(H_{jp}) = H_{0p}$$

при $1 \leq p \leq \alpha$ и $0 \leq j \leq k-1$.

Доказательство. Пусть H_{0p} принадлежит блоку B_0 . Тогда $v_{R_0}^{R_j}(H_{0p})$ принадлежит R_j и, следовательно, должно содержаться в каком-

нибудь блоке из B_j , например в H_{jg} . Но

$$H_{0p} = v_{R_j}^{R_0} v_{R_0}^{R_j} (H_{0p}) \subseteq v_{R_j}^{R_0} (H_{jg}).$$

А так как $v_{R_j}^{R_0}$ отображает R_j на R_0 , найдется такой блок из B_0 , например H_{0r} , что $v_{R_j}^{R_0} (H_{jg}) \subseteq H_{0r}$. Но из максимальности блоков из B_0 следует, что

$$H_{0p} = H_{0r} = v_{R_j}^{R_0} (H_{jg}).$$

Заметим теперь, что отображение $v_{R_j}^{R_0}$ взаимно однозначно, и, следовательно, $|H_{0p}| = |H_{jg}|$, а так как взаимно однозначно и отображение $v_{R_0}^{R_j}$, справедливо также, что $v_{R_0}^{R_j} (H_{0p}) = H_{jg}$. Для $H_{0p_1} \neq H_{0p}$ аналогичные рассуждения показывают, что $v_{R_0}^{R_j} (H_{0p_1}) = H_{jg_1}$, где $H_{jg_1} \neq H_{jg}$, так как в противном случае $v_{R_0}^{R_j}$ преобразовывало бы $H_{0p} \cup H_{0p_1}$ на H_{jg} , в то время как $|H_{0p} \cup H_{0p_1}| > |H_{0p}| = |H_{jg}|$.

Таким образом, $v_{R_0}^{R_j}$ отображает различные блоки из B_0 на различные блоки из B_j . Роли блоков из B_0 и из B_j можно поменять, а это свидетельствует о том, что мощность всех блоков из B_j одинакова.

Остается только произвольным образом пронумеровать блоки из B_0 , как $H_{11}, \dots, H_{0\alpha}$, а затем положить $v_{R_0}^{R_j} (H_{0p}) = H_{jp}$, что и завершает доказательство теоремы.

Условимся теперь, что

$$X_N = X_K = X_M,$$

$$X_L = X_K \times Q_K,$$

$$Q_N = Q_K \times Q_L,$$

при этом во втором равенстве мы отождествляем состояние и выходную величину K .

Нам нужно определить $\beta_N: Q_N \xrightarrow{\text{на}} C'$ так, чтобы автомат N сообщал положение автомата M в C' . Пусть $(p, r) \in Q_N$. Теперь отметим следующее:

(i) Если $p \notin D$, то p принадлежит одному из элементов покрытия C , входящему в C' , и, следовательно, автомат K уже сообщает положение автомата M в C' и не требуется никакой дополнительной помощи от L . Поэтому можно положить, что $\beta_N(p, r) = p$.

(ii) Если же $p \in D$, то для того, чтобы перейти от элемента p из C к некоторому его куску из C' , необходима новая информация, поставляемая автоматом L . В соответствии с нашим выбором «си-

стемы координат» выберем $\beta_N(p, r)$ равным некоторому элементу из C' , содержащему $v_{R_0}^p(r)$.

Теперь нам остается только определить переходы в пространстве состояний, согласующиеся с уже сделанным выбором выходного отображения.

Для $x \in X_N$ имеем $x_N(p, r) = (x_K(p), x_L(p, r))$, где x_K задано, а x_L требуется определить. Поэтому если $(p, r) \in Q_N$, то приходим к следующему:

1. Если $x_K(p) \notin D$, то, согласно определению β_N , отображение $x_L(p, r)$ несущественно, и, следовательно, можно удовлетворить условию (d) любым образом, положив, что $x_L(p, \cdot)$ есть некоторое обратное или тождественное отображение.

2. Если же $x_K(p) \in D$, то $p \in D$, так как класс D начальный. Определим $x_N(p, r)$ как (s, t) , где, естественно, $s = x_K(p)$, а t есть некоторый элемент из Q_L , содержащий $v_s^{R_0} x_M v_{R_0}^p(r)$. Для того чтобы завершить наше доказательство, остается убедиться в том, что $y = v_s^{R_0} x_M v_{R_0}^p$ является обратным или перестановочным преобразованием на $Q_L = \max \{R: R \subseteq R_0, R \in C'\}$.

Ясно, что $y(R_0) \subseteq R_0$, так как

$$R_0 \xrightarrow{v_{R_0}^p} p \xrightarrow{x_M} x_M(p) \subseteq x_K(p) = s \xrightarrow{v_s^{R_0}} R_0.$$

Если $y(R_0)$ есть некоторое собственное подмножество из R_0 , то на самом деле это всего один элемент покрытия C' , так что все состояния Q_L отображаются на этот элемент, и, следовательно, отображение x_L обратное. Если же $y(R_0) = R_0$, то y есть перестановочное отображение на R_0 , а следовательно, перестановочным является и отображение x_L на R_0 . На этом доказательство теоремы Зейгера можно считать законченным, что гарантирует нам справедливость центральной теоремы: *любой автомат M можно представить в виде каскадного соединения PR-автоматов, группы которых делят полугруппу автомата M .*

На этом мы заканчиваем изучение теории автоматов. Мы показали, что в структуре автоматов легче всего разобраться, исследуя их представления алгебраическими системами, в нашем случае полугруппами. Можно ожидать, что по мере введения дополнительных математических ограничений на класс рассматриваемых автоматов для их исследования потребуются и новые алгебраические системы. В четвертой части этой книги мы увидим, что если ограничиться рассмотрением лишь линейных автоматов, то можно перейти от полугрупп к модулям с тем, чтобы воспользоваться той дополнительной информацией, которую несет в себе линейность.

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р. Калман

«Dies ist der Jugend edelster Beruf:
die Welt, sie war nicht, eh ich sie erschuf».

Goethe, *Faust*, 6793-4 (Part II)

10 Алгебраическая теория линейных систем

По своей структуре эта глава построена как маленький учебник. В ней речь идет о линейных системах, причем наряду с основами теории дается и соответствующий вычислительный аппарат. Мы начинаем здесь с основных принципов и постепенно построим все здание линейной теории, строго следуя алгебраическим идеям. Такой подход является новым. Он возник прежде всего под воздействием современных результатов теории автоматов (гл. 6 и 7), а также под влиянием классической теории модулей над полями главных идеалов в том виде, в каком она применяется для определения канонических форм матриц.

В этой главе мы будем пользоваться строго алгебраическим стилем изложения. Он может показаться излишне абстрактным и даже экстравагантным для тех, кто воспитан на преобразованиях Лапласа или линейной теории в пространстве состояний. Однако и в нашей теории по мере необходимости появятся все привычные понятия (такие, как импульсные характеристики, передаточные функции, переходные отображения и т. п.), причем, как правило, их роль и место в теории станут более понятными, а их определения — более общими. У новой теории много и практических преимуществ: частотные и временные методы *удается рассматривать в ней с единых позиций*, линейные системы над конечными полями оказываются *частным случаем* линейных систем общего вида, теория позволяет найти новые методы *эффективных* расчетов реализации и т. д.

Эту главу можно также рассматривать как естественное обобщение элементарной теории, развитой в гл. 2. Как было выяснено там, для решения задачи регулирования необходимо, чтобы система удовлетворяла двум условиям: она должна быть полностью

управляемой и полностью идентифицируемой. Для стационарной системы Σ с непрерывным временем (уравнения (3.2) из гл. 2) эти условия принимают «дуальную» форму:

$$(*) \quad \text{rank}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = \dim X_{\Sigma},$$

$$(**) \quad \text{rank}[H', F'H', \dots, (F')^{n-1}H'] = \dim X_{\Sigma}$$

(теоремы (3.4) и (6.15) из гл. 2). Мы уже отмечали (замечание (3.19) гл. 2), что первое из этих условий практически остается тем же, если от изучения систем с непрерывным временем перейти к системам с дискретным временем. Аналогичная ситуация имеет место и для второго условия. Подчеркнем все же еще раз, что *вся задача регулирования в смысле гл. 2 целиком зависит от алгебраических свойств матриц F , G и H , удовлетворяющих двум упомянутым условиям.*

Поэтому возникает желание выяснить, а нельзя ли построить всю алгебраическую теорию систем на основании только этих двух условий. И оказывается, что это вполне возможно. Условие $(*)$ можно интерпретировать алгебраически, как порождающее модуль над многочленами матрицы F . В этом случае теория модулей входит в теорию систем совершенно естественным образом.

Основное теоретическое достоинство подхода с использованием теории модулей состоит в том, что он вносит полную и (мы надеемся) окончательную ясность в задачу о реализации, и особенно в вопрос о теореме единственности, которая впервые была получена Калманом (теорема 7 (ii) [1963с]). Эта теорема, вызвавшая в свое время многочисленные сомнения, оказывается тривиальным следствием того факта, что линейную систему можно рассматривать как модуль. Поскольку в теории систем задача реализации играет центральную роль, весь материал этой главы скомпонован вокруг этой темы. Мы несколько раз возвращаемся к этой задаче в § 10.6, 10.10, 10.11 и 10.13.

На первых этапах создания теории реализации, последовавших после 1963 г., слишком много внимания уделялось понятию *минимальной* реализации, для которой пространство состояний имеет минимальную размерность. Однако такой подход в действительности был не совсем удовлетворительным, поскольку «размерность» определялась только для линейной задачи. Более плодотворным оказалось вернуться к исходной формулировке Калмана (теорема 7 (ii) [1963с]) и потребовать для минимальной реализации, чтобы она была полностью достижимой и полностью наблюдаемой. Эту реализацию мы будем называть *канонической*. Такая постановка задачи является совершенно общей (не связанной с допущением о линейности), так как соответствует канонической факторизации отображения вход — выход на сюръективное и взаимно однозначное отображения. Многие из обычных трудностей теории реализации

удается обойти, если строго следовать этим идеям. В частности, в § 10.13 мы дадим новое и (надеемся) исчерпывающее изложение теории реализации линейных систем с непрерывным временем.

Математический уровень этой главы довольно элементарен, но он требует некоторого знакомства с понятиями современной алгебры (такими, как абелевы группы, кольца, модули и абстрактные структуры). Для удобства читателей все существенные результаты, используемые в главе, собраны в приложении А.

Исторические и библиографические замечания. Эволюцию рассматриваемой теории можно непосредственно проследить по следующей последовательности статей Калмана [1963с, 1965а, b, 1966b, 1967]. Что же касается чистой математики, то уже с начала 30-х годов теорию модулей систематически использовали для определения канонических форм и для решения различных современных задач линейной алгебры (Ван дер Варден [1931], т. 2, глава о линейной алгебре). С тех пор такая точка зрения завоевала право на энциклопедичность (Бурбаки [1962, 1964]). Однако она еще не до конца принята в университетской системе образования, что, по-видимому, объясняется чисто педагогическими соображениями. Например, в книге Гребя ([1967], гл. XIII) можно увидеть изложение, основанное непосредственно на условии (*), в котором развиваются все результаты и методы теории $R[z]$ -модулей, но само понятие модуля даже не вводится. В настоящей главе имеется много нововведений и неизвестных ранее результатов, идущих дальше, чем работы Калмана за 1963—1966 гг. Например, первое доказательство сходимости фундаментального алгоритма реализации Б. Л. Хо (§ 10.11) было получено практически без упоминания теории модулей (хотя она безусловно помогает понять существо вопроса), в то время как во втором доказательстве можно найти намеки даже на более общий аппарат, выходящий за обычные рамки линейной алгебры.

10.1 Основные определения

Программа данной главы состоит в следующем: мы хотим дать точные и выразительные определения различным свойствам линейных систем, а затем применить чисто алгебраические методы к следствиям, вытекающим из этих определений. Другими словами, нам хотелось бы выяснить в точности, какую же *алгебраическую структуру* представляет собой линейная динамическая система. Принятая система изложения является автономной, и начиная с этого параграфа настоящую главу можно читать независимо от остальной книги. В данном параграфе займемся тем, что найдем связь с основными определениями из гл. 1, и, таким образом, увяжем предшествующие разделы книги с последующим материалом.

Общие предположения. Вплоть до § 10.13 рассматриваются лишь такие системы Σ , про которые можно утверждать, что они:

- 1) с дискретным временем,
- 2) стационарны,
- 3) линейны,
- 4) с конечным числом входов и выходов,
- 5) построены с помощью чисел из произвольного, но фиксированного поля K .

В § 10.13 мы ослабим первые три предположения и используем основные алгебраические идеи для построения гораздо более общей теории.

Такие системы полезно (а с интуитивной точки зрения и удобно) представлять в виде схемы, показанной на рис. 10.1. Система Σ



Рис. 10.1. Схематическое изображение системы.

имеет m входов, на каждый из которых в каждый момент времени $t \in \mathbf{Z}$, где \mathbf{Z} — множество целых чисел, поступает некоторое число, принадлежащее полю K . У системы имеется также p выходов, на каждом из которых в каждый момент времени формируется некоторое число, принадлежащее полю K . Состояния системы и переходы в пространстве состояний также описываются с использованием элементов поля K .

Для того чтобы добиться полной строгости, переведем предположения, сделанные выше, на язык определения (1.1) из гл. 1. Мы имеем:

T — множество моментов времени; оно равно \mathbf{Z} (упорядоченной абелевой группе целых чисел);

U — множество значений входных воздействий (входной алфавит); оно равно K^m , векторному пространству m -ок над полем K ;

Y — множество значений выходных величин (выходной алфавит); оно равно K^p ;

X — пространство состояний, оно равно K^n ;

Ω — пространство входных воздействий, т. е. пространство произвольных функций $T \rightarrow U$ или произвольных последовательностей $\dots, \omega(-1), \omega(0), \omega(1), \dots$, где $\omega(t) \in U$;

Γ — пространство выходных величин, т. е. произвольных функций $T \rightarrow Y$;

φ — отображение перехода $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ вида

$$(1.1) \quad (t+1; t, x, \omega) \mapsto \varphi(t+1; t, x, \omega) = Fx(t) + G\omega(t)$$

где F и G — матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times m)$ над полем K ;
 η — выходное отображение $T \times X \rightarrow Y$ вида

$$(1.2) \quad (t, x) \mapsto \eta(t, x) = Hx,$$

где H — матрица размера $(p \times n)$ над полем K .

(1.3) **Примечание.** Выбор U и Y в виде определенных векторных пространств m -ок и p -ок над полем K выражает всего лишь тот факт, что имеется определенный фиксированный характер взаимодействия системы с окружающей средой. Поэтому такое предположение вполне реалистично. С другой стороны, представление пространства состояний X в виде K^n есть всего лишь условность, позволяющая описывать внутреннее поведение системы численным образом с помощью матриц F , G и H . Как уже отмечалось в этой книге раньше, в общем случае состояние системы нужно рассматривать как абстрактное понятие. При этом свойства системы, связанные с понятием состояния, должны не зависеть от конкретного выбора системы координат в X . Поэтому лучше рассматривать X как абстрактное n -мерное векторное пространство над полем K .

Основываясь на этих соображениях, мы сделаем следующие допущения.

(1.4) **Определение.** Стационарная линейная динамическая система Σ с дискретным временем, с t входами и p выходами над полем K представляет собой сложный объект (F, G, H) , где отображения

$$\begin{aligned} F: X &\rightarrow X, \\ G: K^m &\rightarrow X, \\ H: X &\rightarrow K^p \end{aligned}$$

суть абстрактные K -гомоморфизмы, а X — некоторое абстрактное векторное пространство над K . Размерность пространства X , $\dim X$, определяет размерность системы Σ , $\dim \Sigma$.

Динамическое поведение системы Σ определяется тем, что было сказано выше. Точнее говоря, мы считаем, что тройка (F, G, H) определяет уравнения

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (a) \quad x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t), \\ (b) \quad y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $x \in X$, $u(t) \in K^m$ и $y(t) \in K^p$.

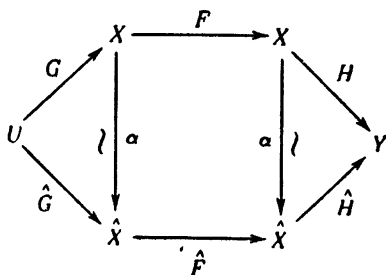
Обозначение $u(t)$ для элемента (точки) пространства $U = K^m$ будет использоваться наравне с обозначением $\omega(t)$ для значений функции $\omega: T \rightarrow U$. Обычно мы не будем делать различия между тройкой (F, G, H) как тройкой K -гомоморфизмов и тройкой

(F, G, H) как тройкой матриц, представляющих эти гомоморфизмы относительно некоторого фиксированного базиса в X . На протяжении § 10.2—10.12 мы всегда будем считать, что рассматриваемая система стационарна с дискретным временем, m входами и p выходами (хотя мы и не будем напоминать об этом постоянно). Кроме того, мы почти всегда будем предполагать, что $\dim \Sigma < \infty$.

Обратим внимание на то, что определение (1.4) является аксиоматическим и будет служить отправной точкой для последующих математических исследований. И каждый раз, когда в последующем мы будем упоминать понятие «система», мы всегда будем иметь в виду его точное определение (1.4).

Поскольку мы приняли в качестве X абстрактное векторное пространство, вполне естественно договориться о том, что две системы эквивалентны, если свойства преобразований входных воздействий в выходные величины и свойства переходных преобразований этих систем оказываются идентичными. Другими словами, мы будем считать, что две такие системы совпадают с точностью до некоторого изоморфизма соответствующих пространств состояний. Эти соображения можно сформулировать строго следующим образом.

(1.6) Определение. Две линейные динамические системы $\Sigma = (F, G, H)$ и $\hat{\Sigma} = (\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ называются *изоморфными* тогда и только тогда, когда существует некоторый K -изоморфизм $\alpha: X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$, такой, что следующая диаграмма K -гомоморфизмов:



является коммутативной. Если A есть матрица над полем K , представляющая отображение $\alpha: X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$, то изоморфизм систем выражается следующими матричными соединениями:

- (1.7) (a) $\hat{F} = AFA^{-1}$,
 (b) $\hat{G} = AG$,
 (c) $\hat{H} = HA^{-1}$.

10.2 Отображение вход — выход для линейной системы

В этой главе мы примем непривычное определение отображения вход — выход системы. Оно связано с желанием иметь предельно простую связь между внешними и внутренними свойствами системы. И, конечно, для этого требуется в определенной степени предупредять ход событий. Однако впоследствии принятое определение будет вполне оправдано теми математическими результатами, которые получаются с его помощью.

Наши отображения вход — выход предназначены для описания исходов «экспериментов» следующего типа:

1. Подаем на вход системы последовательность входных воздействий конечной длительности. Подачу входных воздействий заканчиваем в момент времени $t = t_0$, т. е. при любых $t > t_0$ считаем, что входные воздействия тождественно равны нулю.

2. Наблюдаем выходные величины системы лишь после того, как подача входных воздействий закончилась, т. е. при $t > t_0$. При этом будем предполагать, что значения выходных величин известны при любых $t > t_0$, независимо от того, насколько они велики.

3. Так как мы договорились рассматривать (за исключением § 10.13) лишь стационарные системы, для обозначения момента времени в качестве «настоящего» $t = t_0$ можно выбрать любое целое. Очевидный выбор состоит в том, чтобы положить $t_0 = 0$.

4. Заметим, что в силу линейности системы предположения 1—3 не накладывают никаких ограничений на общность выводов.

Описанную только что конструкцию оформим в виде строгого определения.

(2.1) **Определение.** *Линейным отображением вход — выход для нулевого состояния над K* называется отображение $f: \Omega \rightarrow \Gamma$, удовлетворяющее следующим условиям:

(а) Ω есть множество всевозможных последовательностей K -векторов $\omega: \mathbb{Z} \rightarrow K^m$, таких, что $\omega(t) = 0$ при всех $t > 0$ и всех $t < t_{-1} \leq 0$, где t_{-1} — некоторое целое, возможно зависящее от ω ;

(б) Γ есть множество всевозможных последовательностей K -векторов $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow K^p$, таких, что $\gamma(t) = 0$ при всех $t \leq 0$;

(с) отображение f инвариантно относительно сдвигов во времени в том смысле, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \sigma_\Omega \downarrow & & \downarrow \sigma_\Gamma \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

является коммутативной по отношению к следующим операторам сдвига σ_Ω и σ_Γ :

$$\sigma_\Omega: (0, \dots, \omega(-1), \omega(0); 0, \dots) \mapsto (0, \dots, \omega(0), 0; 0, \dots)$$

(«приписывание нуля»),

$$\sigma_\Gamma: (0, \dots, 0; \gamma(1), \gamma(2), \dots) \mapsto (0, \dots, 0; \gamma(2), \gamma(3), \dots)$$

(«отбрасывание $\gamma(1)$ »);

(d) Ω и Γ суть K -векторные пространства (в обычном смысле, поясняемом ниже), а f есть некоторый K -гомоморфизм относительно описанной выше структуры в Ω и Γ .

(2.2) **Замечание.** Тот факт, что Ω и Γ можно наделять структурой K -векторного пространства, должен быть совершенно ясным. Рассмотрим, например, Ω . Сложение здесь определяется отношением

$$(\omega + \hat{\omega})(t) = \omega(t) + \hat{\omega}(t), \quad \omega, \hat{\omega} \in \Omega$$

(где сложение в правой части понимается как в K -векторном пространстве K^m). Аналогичным образом определяется и скалярное умножение

$$(\alpha \cdot \omega)(t) = \alpha \cdot \omega(t), \quad \alpha \in K, \quad \omega \in \Omega$$

(скалярное умножение в правой части понимается как в K^m).

(2.3) **Замечание.** Последовательности $[f(e_i)]_j$ (равные j -м компонентам векторной последовательности $f(e_i)$, где $e_i \in \Omega$ есть последовательность $\omega_k(0) = \delta_{ik}$, $\omega_k(t) = 0$, если $t \neq 0$) несут ту же информацию, что и импульсная характеристика стационарной линейной системы с непрерывным временем. Последовательность $[f(e_i)]_j$ иногда называют *импульсной реакцией j -го выхода на возмущение i -го входа*. Как известно, знания всех таких реакций достаточно для определения отображения вход—выход для нулевого состояния стационарной линейной системы. Таким образом, мы вновь убеждаемся в том, что принятое определение не влечет за собой потери общности.

(2.4) **Замечание.** Определение (2.1) сформулировано таким образом, что автоматически гарантируется причинность системы в силу того, что оно не дает возможности установить зависимость текущего значения выходной величины (а именно $\gamma(1)$) от будущих значений входных воздействий (а именно от $\omega(1)$, $\omega(2)$, ...). Сам факт определения Ω и Γ на непересекающихся подмножествах $(-\infty, 0)$ и $[1, \infty)$ множества \mathbb{Z} показывает, что прошлое определяет будущее. Все это вытекает непосредственно из условий (2.1a—c) и не требует привлечения линейности. Эти условия гарантируют и существование «состояния», естественным образом

связанного с каждым отображением вход — выход. Короче говоря, *причинность предполагает существование состояния.*

(2.5) **Замечание.** Имеет смысл напомнить следующее «программирующее» определение операторов сдвига:

- σ_0 — сдвинуть в обратном направлении и приписать на конце нуль;
 σ_1 — сдвинуть в обратном направлении и отбросить первый символ.

(2.6) **Вычислительный метод.** Покажем, как с помощью f можно вычислить реакцию линейной системы в нулевом состоянии на произвольную входную последовательность $(\omega(0), \omega(1), \omega(2), \dots)$, $\omega(t) \in K^m$. Легко видеть, что выходная последовательность $(\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \dots)$ в этом случае должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= f(0, \dots, 0, \omega(0); 0, \dots)(1), \\ \gamma(2) &= f(0, \dots, \omega(0), \omega(1); 0, \dots)(1), \\ \gamma(3) &= f(0, \dots, \omega(0), \omega(1), \omega(2); 0, \dots)(1), \\ &\dots\end{aligned}$$

где $f(\cdot)(1)$ есть первый член последовательности $f(\cdot)$.

(2.7) **Обозначение.** Напомним, что выходной символ формируется с задержкой на одну единицу времени по отношению к моменту получения входного символа.

Для того чтобы связать понятие отображения вход — выход, определенное выше, с понятием динамической системы, введенным в § 10.1, нам потребуется следующее определение, которое будет использоваться на протяжении всей этой главы.

(2.8) **Определение.** Линейная динамическая система Σ в смысле определения (1.4) является *реализацией* отображения вход — выход f в смысле определения (2.1) тогда и только тогда, когда отображение вход — выход f_Σ системы Σ совпадает с f , т. е. когда $f_\Sigma = f$.

Сравнивая уравнения (1.5) с тем, что говорилось непосредственно перед определением (2.1), мы сразу получим следующее предложение.

(2.9) **Предложение.** Система Σ реализует отображение f тогда и только тогда, когда

$$(2.10) \quad [f(e_i)]_j = ([HG]_{ji}, [HFG]_{ji}, [HF^2G]_{ji}, \dots).$$

(Здесь квадратные скобки выделяют элементы векторов или матриц.)

Чтобы избежать любых возможных неясностей в определении отображения f_z , выпишем явную формулу

$$(2.11) \quad f_z: \omega \mapsto \left(\sum_t H F^{-t} G \omega(t), \sum_t H F^{-t+1} G \omega(t), \dots \right).$$

10.3 Структура $K[z]$ -модулей в Ω и Γ

Предположим на время, что $K = \mathbb{R}$. В теории линейных систем с дискретным временем уже стало принятым заменять последовательности из Ω и Γ их *дискретными преобразованиями Лапласа*, иначе называемыми *z-преобразованиями* (Фримэн [1965]), которые определяются следующим образом:

$$(3.1) \quad \hat{\omega}(z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \omega(t) z^{-t},$$

$$(3.2) \quad \hat{\gamma}(z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \gamma(t) z^{-t}.$$

«Преобразования» $\omega \mapsto \hat{\omega}$ и $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ можно, конечно, рассматривать как отображения

$$\Omega \rightarrow \{\text{отображения } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^m\},$$

$$\Gamma \rightarrow \{\text{отображения } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n\},$$

так как $z \in \mathbb{C}$; \mathbb{C} — поле комплексных чисел. Поскольку преобразование рассматривается как некоторая *функция* комплексного аргумента z , приведенное определение имеет смысл только в том случае, когда суммы (3.1) и (3.2) *сходятся* (при некотором z).

В принятых нами предположениях относительно Ω в качестве $\hat{\omega}(z)$ мы имеем многочлен, и, следовательно, он определен при любых z . Напротив, сумма (3.2) сходится только при выполнении особых условий, например если

$$(3.3) \quad |z| > 1 \text{ и } |\gamma(t)| < C < \infty \text{ для всех } t.$$

Но хотя выполнение условий сходимости совершенно необходимо для того, чтобы придать методам, основанным на преобразованиях, математическую строгость, в технической литературе с этими условиями обходятся *крайне вольно и тем не менее без очевидных неприятных последствий*.

В чем же здесь дело?

Причина состоит в том, что в огромном большинстве случаев применения линейной теории мы имеем возможность ограничиться изучением конечномерных систем, а тогда вопросы сходимости вообще не играют никакой роли, так как все можно представить алгебраическими выражениями.

Мы займемся теперь построением строгого и в то же время очень простого аппарата, использующего эти соображения. Нет сомнения, что с течением времени это вызовет необходимые

изменения в преподавании автоматике. Здесь же мы сосредоточим внимание лишь на математических аспектах.

До конца этой главы мы будем пользоваться приводимой ниже моделью.

Мы снова предположим, что K — произвольное поле.

Вместо того чтобы считать, что уравнение (3.1) определяет некоторую функцию z , мы будем рассматривать его как определение некоторого изоморфизма между Ω и K -векторным пространством $K^m[z]$ *многочленов от переменной z с коэффициентами из K^m* . Таким образом,

$$(3.1^*) \quad \omega \approx \sum_{t \leq 0} \omega(t) z^{-t} \quad (\text{конечная сумма!}) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix},$$

$$\omega_k \in K(z), \quad k = 1, \dots, m,$$

где символ ω_k (k -я компонента вектора ω) обозначает многочлен

$$\omega_k(z) = \omega_k(0) + \omega_k(-1)z + \dots + \omega_k(-t_1)z^{t_1}.$$

(3.4) **Замечание.** Еще раз подчеркнем, что для нас многочлен — это некоторый алгебраический объект, а не функция комплексной переменной. Такой многочлен есть просто еще один способ представления последовательности из Ω . Переменную z можно рассматривать как задающую время, причем z^k соответствует моменту $t = -k$. Конечно, в такой условности нет ничего сколько-нибудь нового. По сути дела речь не идет о каком-либо «преобразовании». Основное достоинство нового представления связано с удобствами обозначений: ведь правила обращения с многочленами известны всем. (Совет: сейчас самое время ознакомиться с приложением А.)

Мы не станем делать какого-либо различия между ω как конечной векторной последовательностью и ω как векторным многочленом.

Существенная же алгебраическая идея, являющаяся новой (для теории систем), состоит в следующем.

(3.5) **Предложение.** Множество Ω , рассматриваемое как K -векторное пространство $K^m[z]$, наделяется структурой конечного свободного модуля следующим образом:

(а) Абелева группа на Ω задается коммутативной операцией сложения в Ω как в K -векторном пространстве (см. § 2 и, в частности, замечание (2.2)).

(б) Кольцо, действующее на множестве Ω , задается посредством $K[z]$, рассматриваемого как кольцо относительно обычного умножения многочленов.

(с) Скалярное умножение в Ω : $\pi \cdot \omega$ (для $\pi \in K[z]$, $\omega \in \Omega$) определяется обычным покомпонентным произведением векторного многочлена на скалярный.

(d) Базисом множества Ω служат векторы

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

из пространства K^m .

Доказательство. Теорема доказывается тривиальной (и хорошо известной) проверкой аксиом модуля (A.5)—(A.8).

(3.6) **Интерпретация.** Важно отметить, что умножение в $K[z]$ (хорошо знакомое и известное обычное перемножение многочленов) эквивалентно операции свертки скалярных последовательностей. Чтобы убедиться в этом, запишем $\pi(z)$ в виде

$$\pi(z) = \sum_t \pi_t z^t.$$

Отсюда имеем

$$(\pi\pi')(z) = \sum_{r+s=t} \pi_r \pi'_s z^t = \sum_{t,s} \pi_s \pi'_{t-s} z^t = \sum_{t,s} \pi_t \pi'_s z^t.$$

(3.7) **Замечание.** Важно также отметить, что мы не определили в Ω структуры кольца (относительно умножения), даже для случая $m=1$. Вместо этого в предложении (3.5) мы определяем на Ω структуру с операторами, где операторы, принадлежащие кольцу $K[z]$, действуют на Ω посредством операции скалярного умножения. Отметим также, что скалярное умножение на z соответствует оператору σ_Ω , поскольку

$$z \cdot \omega = \sigma_\Omega(\omega),$$

в чем можно непосредственно убедиться с помощью формулы (3.1*). Таким образом, умножение на z является представлением оператора сдвига σ_Ω . Допуская определенную нестрогость, можно сказать, что структура модуля, которой мы наделили Ω , согласно (3.5), позволяет представить оператор сдвига (играющий в исследовании динамики центральную роль) чисто алгебраическим способом.

Возвращаясь затем к формуле (3.2), определим некоторый изоморфизм между Γ и K -векторным пространством $K^p[[z^{-1}]]$ всевозможных формальных степенных последовательностей от переменного z^{-1} с коэффициентом из K^p . Другими словами, заменим формулу (3.2) соотношением

$$(3.2^*) \quad \gamma \approx \sum_{t \geq 0} \gamma(t) z^{-t}.$$

«Формальные степенные ряды» в нашем изложении — это всего лишь другое название для «бесконечных последовательностей». Поэтому вопросу об их сходимости просто не возникает. Нам *не нужно* вычислять число $\gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, даже для тех z , для которых ряд (3.2) может оказаться сходящимся. Переменное z вновь служит своеобразным масштабом времени, где z^{-h} соответствует моменту $t = h$ в строгом согласии с условным обозначением, принятым для изоморфизма (3.1*). Отметим еще, что *нулевой* член степенного ряда (3.2*) всегда равен нулю. Это есть следствие системы обозначений (2.7).

Мы вновь не будем делать особого различия между γ как бесконечной последовательностью и γ как формальным степенным рядом с векторными коэффициентами.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \sigma_\Omega \downarrow & & \downarrow \sigma_\Gamma \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

Согласно определению (2.1c), эта диаграмма должна быть коммутативна для Ω и Γ , рассматриваемых как множества, и для f , σ_Ω и σ_Γ , рассматриваемых как отображения множеств. В линейном случае Ω и Γ суть K -векторные пространства, а следовательно, операторы сдвига σ_Ω и σ_Γ автоматически становятся K -гомоморфизмами. Что касается отображения f , оно должно быть K -гомоморфизмом, согласно определению (2.1d). Таким образом, в линейном случае диаграмма (3.8) является коммутативной диаграммой K -гомоморфизмов. Мы знаем уже, что σ_Ω можно представить в виде $\omega \mapsto z \cdot \omega$ в силу того, что Ω можно наделить структурой $K[z]$ -модуля. А нельзя ли аналогичным образом представить σ_Γ ? Если мы хотим наделить Γ структурой $K[z]$ -модуля так, чтобы $\sigma_\Gamma: \gamma \mapsto z \cdot \gamma$, то тем самым отображение f должно стать $K[z]$ -гомоморфизмом (поскольку коммутативность диаграммы

$$(3.9) \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ z \cdot \downarrow & & \downarrow z \cdot \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

является определением $K[z]$ -гомоморфизма $\Omega \rightarrow \Gamma$).

Поэтому для того, чтобы наделить Γ подходящей структурой $K[z]$ -модуля, мы просто исследуем различные необходимые условия, связанные с тем, что f должно быть $K[z]$ -гомоморфизмом. Имеем тогда

$$f(z \cdot \omega) = z \square f(\omega) = \sigma_\Gamma(f(\omega)),$$

где \square есть (пока неизвестное) скалярное умножение в Γ . Определение σ_{Γ} (см. также замечание (2.5)) показывает, что нужно определить

(3.10) *произведение $\pi \cdot \gamma$ как обычное произведение формального степенного ряда $\gamma \in K^p[[z^{-1}]]$ на многочлен $\pi \in K[z]$ с последующим отбрасыванием всех членов с неотрицательными показателями степени у z .*

После того как мы покончили с этим важным вопросом, обычная проверка аксиом модуля позволяет получить следующий важный результат.

(3.11) **Предложение.** *Множество Γ , рассматриваемое как K -векторное пространство всевозможных формальных степенных рядов относительно z^{-1} с коэффициентами из K^p и $\gamma_0 = 0$, может быть наделено структурой $K[z]$ -модуля со скалярным произведением, определенным согласно (3.10). По отношению к этой структуре модуля оператор сдвига σ_{Γ} может быть представлен как $\gamma \mapsto z \cdot \gamma$.*

Отметим, что $K[z]$ -модуль Γ ни свободен, ни конечен.

10.4 Модули и эквивалентность Нерода

Итак, мы установили, что отображение f , определенное согласно (2.1), есть $K[z]$ -гомоморфизм. Именно это математическое следствие системного определения (2.1) делает линейную теорию систем интересной (и богатой результатами).

В качестве первого применения подхода с использованием теории модулей отметим, что существует некоторый модуль, естественным образом связанный с отображением вход — выход f или естественным образом индуцированный этим отображением; мы говорим о фактормодуле $K[z]$ -модуля множества Ω по подмодулю $\ker f$. И хотя мы считаем, что читатель знаком с понятием фактормодуля, мы введем это понятие здесь в связи с его важной интерпретацией в теории систем.

Для заданного $K[z]$ -гомоморфизма f можно установить отношение эквивалентности \approx_f , определяемое условием

(4.1) $\omega \approx_f \hat{\omega}$ тогда и только тогда, когда $f(\omega) = f(\hat{\omega})$, или, что то же,

(4.2) $\omega \approx_f \hat{\omega}$ тогда и только тогда, когда $\omega - \hat{\omega} \in \ker f$.

Чтобы установить связь с материалом гл. 7, отметим следующее свойство отношения эквивалентности.

(4.3) **Предложение.** *Отношение \approx_f является отношением конгруэнтности на Ω , рассматриваемым как $K[z]$ -модуль.*

Доказательство. Обозначим через $[\omega]_f$ класс эквивалентности для ω , порождаемый отношением \approx_f .

Нам нужно доказать, что класс эквивалентности для суммы $\omega + \omega'$ содержит все суммы $\hat{\omega} + \hat{\omega}'$, где $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}'$ — произвольные представители классов $[\omega]_f$ и $[\omega']_f$. Тогда $\omega - \hat{\omega}$ и $\omega' - \hat{\omega}'$ принадлежат $\ker f$, согласно (4.2). Поэтому $\omega + \omega' - (\hat{\omega} + \hat{\omega}') \in \ker f$, поскольку $\ker f$ есть подпространство из Ω . Но отсюда вновь в силу (4.2) имеем $\hat{\omega} + \hat{\omega}' \in [\omega + \omega']_f$.

Аналогичным образом можно доказать, что если $\omega' \in [\omega']_f$, то $\alpha\omega' \in [\alpha\omega]_f$ (где, конечно, $\alpha \in K[z]$). Доказательство закончено.

Предположим, что $[\omega]_f$ рассматриваются как абстрактные объекты, а не как подмножества из Ω . Тогда доказательство предложения (4.3) показывает, что абстрактное множество $\{[\omega]_f: \omega \in \Omega\} = X_f$ может быть наделено структурой $K[z]$ -модуля и что в этом модуле операции $+$ и \cdot определяются соотношениями

$$(4.4) \quad \begin{aligned} [\omega]_f + [\omega']_f &= [\omega + \omega']_f, \\ z \cdot [\omega]_f &= [z \cdot \omega]_f. \end{aligned}$$

По определению имеем $\Omega/\ker f = X_f$. Поэтому предложение (4.3) эквивалентно следующему.

(4.5) **Предложение.** Классы эквивалентности X_f , порожденные (для модуля) отношением эквивалентности \approx_f , могут быть наделены структурой $K[z]$ -модуля, который называется фактормодулем $\Omega/\ker f$ (по подмодулю $\ker f$).

Вспомним теперь, как в § 7.2 мы обсуждали отношение эквивалентности Нерода E_f , индуцируемое отображением f . Здесь важно отметить следующее. Два входных воздействия ω и $\hat{\omega}$ эквивалентны по Нероду тогда и только тогда, когда выходные последовательности $f(\omega)$ и $f(\hat{\omega})$ одинаковы и остаются таковыми, какое бы произвольное входное воздействие $v \in \Omega$ ни следовало за ω и $\hat{\omega}$. Понятие «следования за» определяет умножение сшиванием, которое в настоящем контексте определяется соотношением

$$\omega \circ v = (0, \dots, 0, \omega_q, \omega_{q-1}, \dots, \omega_0, v_{q'}, v_{q'-1}, \dots, v_0; 0, \dots).$$

В системе обозначений с помощью многочленов это означает, что

$$(4.6) \quad \omega \circ v = z^{1+q'}\omega + v,$$

где

$$q' = \deg v = \max_k \{\deg v_k: k = 1, \dots, m\},$$

а символ \deg определяет обычную степень многочлена. Таким образом, строгое определение отношения эквивалентности Нерода

индуцированного отображением f , состоит в следующем:

$$\omega E_f \hat{\omega} \text{ тогда и только тогда, когда } f(\omega \circ \nu) = f(\hat{\omega} \circ \nu)$$

(4.7) для всех $\nu \in \Omega$,

где ν может быть и пустой последовательностью \emptyset , для которой $\omega \circ \emptyset = \omega$. Обозначим классы эквивалентности Нерода через $(\omega)_f$.

Теперь мы в состоянии сформулировать чрезвычайно важный, хотя и простой, результат.

(4.8) **Предложение.** $[\omega]_f = (\omega)_f$ для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. То, что для выполнения (4.1) необходимо (4.7), следует сразу из определений. В силу линейности отображения f и определений (4.4) имеем

$$f(\omega \circ \nu) = f(z^{1+\deg \nu} \omega) + f(\nu) = z^{1+\deg \nu} f(\omega) + f(\nu).$$

Поэтому и (4.7) гарантирует выполнение (4.1). Доказательство окончено.

Как мы убедились в § 7.2, классы эквивалентности Нерода естественным образом определяют множество состояний, соответствующее отображению вход — выход. Поэтому с помощью (4.8) мы получаем следующий результат, который по многим причинам (а они станут яснее в дальнейшем) мы считаем фундаментальным.

(4.9) **Фундаментальная теорема линейной теории систем.** *Естественное множество состояний X_f отображения вход — выход f над полем K для линейной стационарной системы с нулевым состоянием и дискретным временем можно наделить структурой $K[z]$ -модуля.*

Мы уже пользовались и будем продолжать пользоваться специальным соглашением об обозначениях.

(4.10) **Обозначения.** Множество всегда обозначается одной и той же буквой, какая бы структура ему ни была придана. Аналогично этому элементы множества также обозначаются теми же буквами, независимо от структуры. Поэтому Ω может быть абстрактным множеством, K -векторным пространством, $K[z]$ -модулем или еще чем-нибудь. Элементы Ω обозначаются через ω , и, следовательно, ω может быть как последовательностью, так и многочленом. Каждый раз, когда в этом возникнет необходимость, мы станем специально указывать, о какой структуре идет речь. Читателю придется постараться привыкнуть к такому абстрактному подходу, чтобы «наделять» множество какой-либо структурой или «освобождать» это множество от нее без особых мыслительных усилий. *Предупреждение:* как только новая структура вводится первый раз, необходимо тщательно проверить выполнение условий существования, как это было в случае предложения (3.11).

10.5 Пространство состояний как модуль

Обратимся теперь к линейной динамической системе Σ , описываемой ее уравнениями перехода (1.5a). Точнее говоря, будем рассматривать Σ как пару $(F, G, -)$, где $F: K^n \rightarrow K^n$ и $G: K^m \rightarrow K^n$ суть K -гомоморфизмы (а отображение H несущественно, как и следует из обозначений). Нам хочется сопоставить системе Σ некоторый $K[z]$ -модуль X_Σ .

Стандартный прием построения $K[z]$ -модулей содержится в следующем предложении.

(5.1) Предложение. Пусть $A: V \rightarrow V$ — произвольный K -эндоморфизм K -векторного пространства V . Тогда V можно наделять структурой $K[z]$ -модуля с скалярным умножением

$$(\pi, v) \mapsto \pi \cdot v = \pi(A)v, \quad \pi \in K[z], \quad v \in V,$$

где $\pi(A)$ — операция «подстановки A в π », т. е. $\pi(A)$ является эндоморфизмом $\pi_0 I + \dots + \pi_n A^n$, а $\pi(A)v$ — обычное действие эндоморфизма $\pi(A)$ на v .

И обратно, если задан любой $K[z]$ -модуль V , то $K[z]$ -эндоморфизм $v \mapsto z \cdot v$ индуцирует K -эндоморфизм $v \mapsto Av = z \cdot v$.

Пусть модуль X_Σ , построенный для системы Σ с помощью этого процесса (при условии, что $V = X_\Sigma$ есть пространство состояний системы Σ , а $A = F_\Sigma$), называется в дальнейшем $K[z]$ -модулем, индуцируемым системой Σ . У этого модуля есть особое множество элементов, определяемых равенством

$$\{Ge_1, \dots, Ge_m\} = \{g_1, \dots, g_m\},$$

где e_k определяются согласно (3.5d). По причинам, которые скоро станут понятными, мы назовем элементы этого множества *достижимыми образующими* модуля X_Σ .

Определение системы Σ в явном виде говорит нам о том, как входные воздействия изменяют (в динамическом смысле) состояние системы. Это изменение можно рассматривать как своеобразное умножение. (Мы обозначим его с помощью правого умножения, чтобы не спутать с скалярным умножением, а в качестве символа умножения используем \circ , так как динамическое изменение состояния тесно связано с операцией сшивания.) Таким образом, отображение φ_ω начального состояния в состояние через единицу времени после окончания входной последовательности обозначается через

$$x \mapsto x \circ \omega$$

и определяется в явной форме как

$$(5.2) \quad x \circ \omega = F^{1+\deg \omega} x + \sum_{t=-\deg \omega}^0 F^{-t} G \omega(t)^1).$$

В качестве одного из первых фактов, оправдывающих название теоремы (4.9), докажем простое предложение.

(5.3) **Предложение.** *Динамическое действие можно представить в виде действия модуля.*

Доказательство. По определению отображения $x \mapsto Fx$ (в обозначениях векторного пространства) оно эквивалентно отображению $x \mapsto z \cdot x$ (в обозначениях теории модулей). Более того, поскольку, согласно нашим обозначениям,

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \sum_{k=1}^m \omega_k(t) e_k, \\ \omega_k(z) &= \sum_t \omega_k(t) z^{-t} \end{aligned}$$

и

$$G e_k = g_k,$$

ясно, что

$$(5.4) \quad x \circ \omega = z^{1+\deg \omega} \cdot x + \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot g_k.$$

(5.5) **Интерпретация.** В частности, имеем, что

$$(5.6) \quad 0 \circ \omega = \sum_{k=0}^m \omega_k \cdot g_k.$$

Левая часть этой формулы обозначает состояние x , достижимое из состояния 0 в результате использования входного воздействия ω . (Посмотрите определение (2.13) гл. 2.) Правая же часть представляет этот элемент (рассматриваемый как элемент модуля) в виде линейной комбинации достижимых образующих $g_k = G e_k$. В частности, ω_k есть «сигнал», который нужно подать на k -й вход системы Σ для того, чтобы перевести ее в состояние $x = 0 \circ \omega$. Другими словами, *линейная комбинация элементов модуля соответствует изменению состояния с помощью подходящих входных воздействий*. Таким образом, скалярное умножение модуля

¹⁾ Хотя это выражение и вполне определено, оно не подходит для описания реакции на «входное воздействие», состоящее из одних нулей, поскольку $\omega = 0$ есть многочлен нулевой степени, т. е. это последовательность, состоящая *ровно из одного нуля*. Необходимые изменения, позволяющие включить и этот случай, можно найти в § 10.12.

обеспечивает нас исключительно компактной формой записи реакции системы на входное воздействие, приложенное к конкретному входу системы. Образующая $g_k \in X_\Sigma$ соответствует k -му входу, а термин «достижимая» показывает, что этот вход действительно может использоваться внешним потребителем системы Σ , т. е. что переход $0 \rightarrow \omega_k \cdot g_k$ в пространстве состояний можно совершить, не прибегая к «вскрытию» системы и использованию специальных сигналов, вводимых прямо внутрь системы.

Основываясь на этих соображениях, мы можем сразу получить следующее предложение.

(5.7) Предложение. *Достижимые состояния системы Σ образуют подмодуль модуля X_Σ , порождаемый достижимыми образующими модуля X_Σ .*

(5.8) Предупреждение. Поскольку в общем случае необязательно, чтобы все состояния системы были достижимыми, достижимые образующие не обязательно порождают все подмодули модуля X_Σ . Но X_Σ порождается конечной системой образующих каждый раз, когда X_Σ (как K -векторное пространство состояний системы Σ) конечномерно, так как в этом случае элементы базиса X_Σ (как векторного пространства) могут служить образующими X_Σ (как модуля).

Подводя итог, отметим еще раз большое преимущество подхода с использованием теории модулей. Такой подход позволяет описать результат воздействия на систему входной последовательности (произвольной, но конечной длины) при условии, что в начальный момент времени система находилась в нулевом состоянии, с помощью одного алгебраического действия. Представим эту операцию в новых обозначениях:

$$(5.9) \quad \bar{G}_\Sigma: \Omega \rightarrow X_\Sigma: \omega \mapsto 0 \circ \omega = \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot g_k.$$

Сужение \bar{G}_Σ на K^m (которое считается изоморфным пространству многочленов нулевой степени и, следовательно, является подмодулем модуля $K^m[z]$) — это и есть отображение $G_\Sigma = G: K^m \rightarrow K^n$, встречающееся в определении системы Σ . Отметим, что \bar{G}_Σ является гомоморфизмом $K[z]$ -модуля (что следует непосредственно из определения).

Отображение \bar{G} можно также определить для фактормодуля $X_f = \Omega / \ker f$, индуцированного отображением f , согласно соотношению

$$(5.10) \quad \bar{G}_f: \Omega \rightarrow X_\Sigma: \omega \mapsto [\omega]_f.$$

Как и раньше, \bar{G}_f остается $K[z]$ -гомоморфизмом, так как

$$\bar{G}_f(z \cdot \omega) = [z \cdot \omega]_f = z \cdot [\omega]_f = z \cdot \bar{G}_f(\omega)$$

в соответствии с определением скалярного умножения в X_f (см. (4.5)). Этот факт можно было бы использовать для того, чтобы попытаться угадать «истинную» структуру модуля в X_f , которую раньше мы взяли чисто произвольно. Другими словами, тот факт, что динамические отображения хорошо согласуются с алгебраическими потребностями, приводящими к построению фактормодуля, является счастливой случайностью. Это еще одна причина, объясняющая название теоремы (4.9).

Рассмотрим теперь выходное отображение H_Σ динамической системы Σ . Ясно, что H индуцирует отображение состояние \rightarrow выходная последовательность, соответствующая этому состоянию.

Запишем

$$(5.11) \quad \bar{H}_\Sigma: X \rightarrow \Gamma: x \mapsto (Hx, HFx, HF^2x, \dots) = (Hx, H(z \cdot x), H(z^2 \cdot x), \dots),$$

и назовем \bar{H}_Σ *расширением* отображения $H_\Sigma = H$. Совершенно ясно, что \bar{H}_Σ есть $K[z]$ -гомоморфизм.

Точно так же функция f индуцирует отображение

$$(5.12) \quad \bar{H}_f: X_f \rightarrow \Gamma: [\omega]_f \mapsto f(\omega).$$

Нам нужно проверить, насколько хорошо определено \bar{H}_f , но это оказывается тривиальным: если $[\omega]_f = [\hat{\omega}]_f$, то $f(\omega) = f(\hat{\omega})$ в силу определения (4.1).

Теперь мы видим, как переводить наиболее важные понятия, связанные с f и Σ , на язык $K[z]$ -модулей и $K[z]$ -гомоморфизмов.

(5.13) **Обозначения.** Приведем в систему терминологию, введенную до сих пор. Динамическая система $\Sigma = (F, G, H)$ индуцирует тройку $(X_\Sigma, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H}_\Sigma)$, где

X_Σ есть $K[z]$ -модуль, индуцированный гомоморфизмом F (предложение (5.1));

$g_k = Ge_k$, $k = 1, \dots, m$, есть достижимые образующие модуля X_Σ ;

\bar{H}_Σ есть отображение (5.11), индуцированное отображением H .

В свете этого ясно, что при заданных $(X, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H})$ можно индуцировать систему Σ , просто-напросто обратив каждый из этапов процедуры, определенной выше. Для удобства мы станем называть тройку $(X_\Sigma, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H}_\Sigma)$ *модулем* системы Σ и часто будем говорить об этом модуле как о модуле X_Σ . Короче говоря, будем считать систему Σ *эквивалентной модулю* X_Σ . (Для простоты индекс у X_Σ можно и отбросить.)

Аналогично этому отображение вход — выход f индуцирует тройку $(X_f, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H}_f)$, где

$X_f = \Omega / \ker f$ (как для $K[z]$ -модуля);

$g_k = [e_k]_f$;

\bar{H}_f есть отображение (5.12), индуцированное отображением f .

Обращая этот процесс, мы немедленно увидим, что $f = \bar{H}_f \circ \bar{G}_f$, где

$$\bar{G}_f: \omega \mapsto [\omega]_f = \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot g_k.$$

Мы будем называть тройку $(X_f, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H}_f)$ просто *модулем* отображения f и сокращенно обозначать через X_f . И снова имеем, что f эквивалентно X_f .

Иногда полезно рассматривать тройку (X, \bar{G}, \bar{H}) вместо тройки $(X, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H})$. Совершенно ясно, что и эти две тройки эквивалентны.

10.6 Теория абстрактной реализации

Напомним фундаментальное определение (2.8). Система Σ реализует f тогда и только тогда, когда $f_\Sigma = f$. Для любого f реализации бесспорно существуют. Действительно, достаточно взять динамическую систему Σ , у которой $X_\Sigma = \Omega$ (векторное пространство), $F = \sigma$, G есть тождественное преобразование, а $\bar{H} = f$. Но такая реализация, естественно, тривиальна и бесполезна. Аппарат теории модулей, основание для применения которого заложено в предыдущих параграфах, позволяет построить другую реализацию, являющуюся естественной, полезной, нетривиальной и потому заслуживающей пристального внимания. Для этого нужно сопоставить отображению f его модуль $(X_f, \{g_1, \dots, g_m\}, \bar{H}_f)$, а затем рассматривать эту тройку как динамическую систему Σ . Легко проверить, что такая система реализует f .

Теперь нам нужно показать, что эта (абстрактно) построенная реализация является в некотором смысле единственной заслуживающей изучения. Мы рассматриваем сейчас задачу реализации как «попытку угадать уравнения движения динамической системы по поведению ее входных и выходных сигналов», или как «задачу построения физической модели, объясняющей экспериментальные данные», или как «задачу построения принципиальной схемы, которая может соответствовать внутреннему устройству черного ящика, чье отображение вход — выход совпадает с f ».

В 1962 г., задолго до создания излагаемого формализма, Калману удалось получить, по-видимому, первый полноценный результат в этом направлении. Перефразируя несколько теорему 7 из ра-

боты Калмана [1963с] с тем, чтобы обеспечить единство стиля, мы можем сформулировать этот результат в следующем виде.

1. Если динамическая система Σ исследуется с помощью экспериментального изучения причинных связей и если f есть ее (причинное) отображение вход — выход, построенное по уравнению движения, то f зависит лишь от некоторой подсистемы Σ_0 системы Σ , которая является одновременно полностью достижимой и полностью наблюдаемой. Остальная часть системы Σ не оказывает на f никакого влияния и может выбираться произвольным образом, не нарушая при этом f .

2. Если любые две системы Σ и $\hat{\Sigma}$ одновременно полностью достижимы и полностью наблюдаемы и имеют одинаковые отображения вход — выход f , то они различаются лишь используемыми системами координат в соответствующих пространствах состояний.

Из этих фундаментальных результатов сразу вытекает важное следствие (также подробно рассмотренное в работе Калмана [1963с]).

3. Если некоторая система Σ , реализующая отображение¹⁾ f , не является полностью достижимой или полностью наблюдаемой, то система Σ содержит какие-то части, которые не имеют никакого отношения к экспериментальным данным, обобщенным в f , а получены совершенно произвольным образом, зависящим лишь от вида конкретного алгоритма, использованного для построения системы Σ . (Отметим, что в литературе, опубликованной до 1965 г., есть очень много таких примеров.)

4. Если некоторая система Σ , реализующая отображение f , полностью достижима и полностью наблюдаема, то она существенно единственным образом определяется отображением f , поскольку выбор подходящей системы координат пространства состояний принципиально нельзя сделать на основании экспериментального наблюдения входных воздействий и реакции на них исследуемой системы. Так или иначе задача выбора системы координат в пространстве состояний несущественна, так как то, каким образом обозначать внутренние состояния системы Σ , не имеет никакого содержательного физического значения.

Ниже мы убедимся, что утверждение о том, что f «существенно единственным образом определяет систему Σ », есть прямое следствие теоремы (4.9).

Приведем теперь одно важное определение.

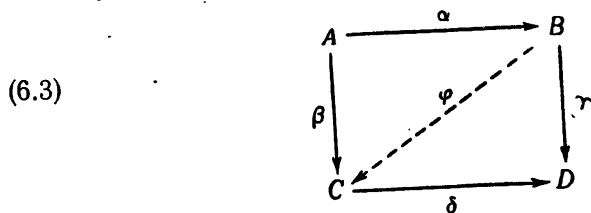
(6.1) **Определение.** Реализация Σ отображения f называется *канонической* (или *естественной*) тогда и только тогда, когда она

¹⁾ Вместо выражения «система Σ , реализующая отображение f » иногда для краткости используется «реализация Σ отображения f » или просто «реализация f ». — Прим. ред.

полностью достижима и полностью наблюдаема. (Определения двух последних понятий даны в гл. 2, (2.12) и (6.4).)

Нам хочется построить теорию реализуемости предельно простым и элементарным способом. Для этого забудем на время о линейности и сформулируем тривиальную, но полезную лемму из теории множеств, базирующуюся на работе Зейгера [1967b].

(6.2) **Лемма Зейгера о пополнении.** Пусть A, B, C и D — произвольные множества. Рассмотрим диаграмму



и предположим, что отображение α сюръективно, а отображение δ биективно.

Тогда существует единственное отображение φ (показанное на диаграмме пунктиром), такое, что пополненная диаграмма остается коммутативной.

Доказательство (методом «обхода»). Возьмем произвольный элемент $b \in B$. Поскольку отображение α сюръективно, множество $\alpha^{-1}(b)$ не пусто. Тогда для любого $a \in \alpha^{-1}(b)$ коммутативность требует, чтобы

$$(\delta \circ \beta)(a) = d = (\gamma \circ \alpha)(a) = \gamma(b).$$

Но так как отображение δ биективно, найдется единственное c , такое, что $c = \delta^{-1}(d)$. Определим

$$\varphi: b \mapsto c = (\delta^{-1} \circ \gamma)(b).$$

Тогда верхний треугольник является коммутативным, поскольку

$$\beta(a) = (\delta^{-1}) \circ (\gamma \circ \alpha)(a) = ((\delta^{-1} \circ \gamma) \circ \alpha)(a) = (\varphi \circ \alpha)(a)$$

в силу коммутативности (и ассоциативности) отображений, входящих в композицию. Аналогичным образом нижний треугольник также коммутативен, так как

$$(\delta \circ \varphi)(b) = (\delta \circ (\delta^{-1} \circ \gamma))(b) = \gamma(b).$$

Никакое другое построение невозможно, так что φ единственно.

(6.4) **Следствие.** Если коммутативная диаграмма (6.3) образована K -векторными пространствами и K -гомоморфизмами, то отображение φ является K -гомоморфизмом.

Доказательство. Действительно, отображение φ есть композиция K -гомоморфизмов γ и δ^{-1} : образ $\gamma \circ \alpha \rightarrow C$.

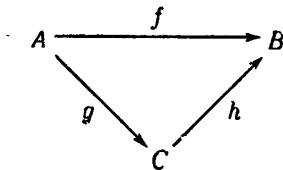
Аналогичным образом доказывается и другое следствие.

(6.5) Следствие. Если коммутативная диаграмма образована $K[z]$ -модулями и $K[z]$ -гомоморфизмами, то φ также является $K[z]$ -гомоморфизмом.

Мы остановились на этих тривиальных результатах по важной причине. Основные свойства реализации зависят лишь от фактов, содержащихся в лемме Зейгера, т. е. от очень простых свойств отображений. Но причина, по которой лемму Зейгера удастся использовать в теории динамических систем, заключается в том, что структурные свойства линейности, как оказалось, согласуются с диаграммой (6.3) не только в смысле K -векторных пространств, но и в смысле $K[z]$ -модулей. Грубо говоря, эффективность алгебраических методов в применении к теории динамических систем определяется возможностью наделять дополнительную структурой диаграммы, подобные (6.3), таким образом, что эта структура отражает некоторые важные динамические свойства.

Оставаясь на том же элементарном теоретико-множественном уровне, что и в теореме Зейгера, мы можем сформулировать определение, аналогичное (6.1).

(6.6) Определение. Пусть A и B — произвольные множества, а $f: A \rightarrow B$ — произвольное отображение. Мы будем говорить, что f факторизуется по множеству C тогда и только тогда, когда существует коммутативная диаграмма



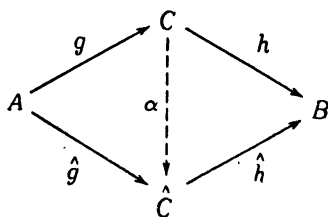
Факторизация называется канонической (или естественной) тогда и только тогда, когда g сюръективно, а h биективно.

Первым применением леммы Зейгера является следующее предложение.

(6.7) Предложение. Любые две канонические факторизации $f = h \circ g = \tilde{h} \circ \tilde{g}$ отображения f по множествам C и \hat{C} эквивалентны в следующем смысле: существует единственный изоморфизм множеств $\alpha: C \xrightarrow{\sim} \hat{C}$, такой, что $\tilde{g} = \alpha \circ g$ и $\tilde{h} = h \circ \alpha$.

Отсюда следует, что число элементов множества C равно числу элементов множества \hat{C} .

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму



Поскольку g сюръективно, а h биективно, согласно лемме Зейгера отображение α существует и единственно. А так как \hat{g} сюръективно, а \hat{h} биективно, то существует и единственное β , отображающее \hat{C} в C . В силу коммутативности $\beta \circ \alpha$ представляет собой тождественное отображение на C , а $\alpha \circ \beta$ есть тождественное отображение на \hat{C} . Таким образом, $\beta = \alpha^{-1}$, а α есть изоморфизм множеств.

Воспользуемся затем следствиями леммы Зейгера.

(6.8) Следствие. Если f есть некоторый K -гомоморфизм (или $K[z]$ -гомоморфизм), то любые две канонические факторизации эквивалентны в смысле существования некоторого K -гомоморфизма ($K[z]$ -гомоморфизма) α . В частности, в этом случае множества C и \hat{C} являются изоморфными K -векторными пространствами ($K[z]$ -модулями).

Теперь мы в состоянии доказать следующую важную теорему.

(6.9) Фундаментальная теорема линейной теории реализации. Любые две канонические реализации отображения вход — выход f являются изоморфными как $K[z]$ -модули u , следовательно, как динамические системы.

Это означает, что все канонические реализации любого фиксированного отображения f существенно одинаковы. Классы эквивалентности канонических реализаций находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности отображений вход — выход.

Доказательство. Нам, по сути дела, остается лишь перевести определения «канонической реализации» на более абстрактный язык факторизации отображений.

Пусть система $X = (X, \bar{G}, \bar{H})$ есть некоторая каноническая реализация отображения f . Тогда система X полностью достижима, что означает сюръективность отображения $\bar{G}: \Omega \rightarrow X$. Система X должна быть и полностью наблюдаемой, что означает биективность отображения $\bar{H}: X \rightarrow \Gamma$. (Читатель должен убедиться в этом, изучив определения из § 2.6.) По определению реализации $f = \bar{H} \circ \bar{G}$.

Поэтому любая каноническая реализация отображения f индуцирует каноническую факторизацию отображения f .

Пусть $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{G}, \hat{H})$ есть другая каноническая реализация. Тогда $\hat{f} = \hat{H} \circ \hat{G}$. Но согласно следствию (6.8), X как $K[z]$ -модуль является изоморфным \hat{X} . Более того, $\hat{G} = \alpha \circ \bar{G}$ и $\bar{H} = \hat{H} \circ \alpha$.

Но с учетом фактов, изложенных в конце § 10.5, отсюда сразу получается, что динамические системы Σ и $\bar{\Sigma}$, соответствующие реализациям X и \hat{X} , также изоморфны в смысле определения (1.6).

Приведем и более прозрачные соображения. Заметим, что при матричном представлении отображения α используются элементы из K (но не из $K[z]$). Это сразу следует из того, что существует изоморфизм $X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ относительно структуры K -модуля (векторного пространства) этих множеств, поскольку K можно рассматривать как подкольцо $K[z]$. Но тогда соотношение $\hat{G} = \alpha \circ \bar{G}$ гарантирует выполнение условия (1.7b), соотношение $\bar{H} = \hat{H} \circ \alpha$ гарантирует выполнение условия (1.7c), и, наконец, соотношение

$$\alpha(Fx) = \alpha(z \cdot x) = z \cdot \alpha(x) = z \cdot \hat{x} = \hat{F}\hat{x} = \hat{F}\alpha(x)$$

обеспечивает выполнение условия (1.7a).

(6.10) **Предложение.** *Размерность системы Σ , $\dim \Sigma$, является минимальной в классе всех реализаций отображения f тогда и только тогда, когда Σ есть каноническая реализация f .*

Доказательство. Пусть $\hat{\Sigma}$ — любая реализация, а Σ — каноническая реализация. Тогда $\hat{f} = \hat{h} \circ \hat{g}$ и, следовательно, $h(\hat{X}) \supset R[f]$.¹⁾ Но согласно утверждению (6.8), $X \approx R[f]$, поскольку f может быть канонически факторизовано так, чтобы $\Omega \rightarrow R[f] \rightarrow \Gamma$ (где второе отображение является естественной инъекцией). Поэтому имеем

$$\dim \hat{\Sigma} \triangleq \dim \hat{X} \geq \dim R[f] = \dim X \triangleq \dim \Sigma.$$

Если в средней части этой цепочки отношений справедлив знак равенства, то $h(\hat{X}) \approx R[f]$, т. е. отображение h биективно. Более того, $R[\hat{g}] \approx \hat{X}$ (поскольку в противном случае $f \neq \hat{h} \circ \hat{g}$), откуда следует, что \hat{g} сюръективно. Поэтому минимальность размерности $\dim \hat{X}$ гарантирует, что соответствующая факторизация является канонической.

(6.11) **Терминология.** Начиная с этого момента мы будем на равных правах называть каноническую реализацию минимальной. (Лишь в конце § 10.11 мы встретимся с ситуацией, где минимальная реализация не обязательно совпадает с канонической). Учи-

¹⁾ Здесь $R[f]$ есть область значений f . — Прим. ред.

тая утверждение (6.10), мы определим $\dim f$ как *размерность канонической реализации отображения f* . Такая терминология полностью оправдывается фундаментальной теоремой (6.9). Будем говорить, что линейное отображение f *конечномерно* тогда и только тогда, когда f можно факторизовать по некоторому конечномерному пространству. (Стандартная терминология для этого случая утверждает, что отображение f имеет *конечный ранг*. Однако для нас в этой книге термин «конечномерный» кажется более осмысленным.)

Другой возможный подход (подход Зейгера). Можно, конечно, доказать теорему (6.9), не обращая явно к теореме (4.9) и даже не упоминая о модулях, пользоваться для доказательства аппаратом, рассчитанным на обычные структуры K -векторных пространств. Такой подход имеет и существенные преимущества, как станет ясным в § 10.11.

Определим *реализацию* как произвольную факторизацию $f = \bar{H} \circ \bar{G}$ отображения f , удовлетворяющую следующему условию: из $\bar{G}(\omega) = \bar{G}(\hat{\omega})$ следует, что $\bar{G}(\sigma_\omega \omega) = \bar{G}(\sigma_\omega \hat{\omega})$.

Поскольку отображение f стационарно, определение (2.1с) гарантирует коммутативность следующей диаграммы K -гомоморфизмов (существование F будет доказано позже):

$$(6.12) \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \downarrow \sigma_\Omega & \searrow \bar{G} \quad \nearrow \bar{H} & \downarrow \sigma_\Gamma \\ & X & \\ & \vdots F & \\ & X & \\ \uparrow \bar{G} \quad \nwarrow \bar{H} & & \uparrow \end{array}$$

Такое определение реализации согласуется со стандартным и имеет то дополнительное преимущество, что оказывается очень близким к интуитивному представлению о состоянии системы. Это определение утверждает, что входную последовательность ω можно заменить состоянием $x = \bar{G}(\omega)$, обладающим тем свойством, что выходная последовательность $\gamma = f(\omega)$ может быть вычислена с его помощью как $\gamma = \bar{H}(x)$. Другими словами, пространство состояний X впитывает в себя всю информацию о прошлом, которая может оказаться необходимой, и является *достаточной* для вычисления поведения системы в будущем. Кроме того, состояния долж-

ны определяться «постоянным» образом: если мы договорились, что ω и $\hat{\omega}$ определяют одно и то же состояние (т. е. если $\bar{G}(\omega) = \bar{G}(\hat{\omega})$), то одинаковые состояния должны определять как $\sigma_{\Omega}\omega$, так и $\sigma_{\Omega}\hat{\omega}$.

Проверим, гарантирует ли это определение реализации существование тройки (F, \bar{G}, H) , задающей некоторую динамическую систему Σ . Существование H и \bar{G} сразу следует из определения факторизации (и из сохранивших свою силу определений Ω и Γ). Для того же, чтобы определить F , достаточно достроить коммутативную диаграмму (16.12) пунктирной стрелкой, так как в этом случае диаграмма становится эквивалентной уравнениям (1.5). Доказать существование F просто. Действительно,

$$(6.13) \quad F: x \mapsto x' = \begin{cases} \bar{G}(\sigma_{\Omega}\omega), & \text{если } x = \bar{G}(\omega), \\ \in \bar{H}^{-1}(\sigma_{\Gamma}(\bar{H}(x))), & \text{если } x \notin R[\bar{G}]. \end{cases}$$

Заметим, что F не единственно, если только \bar{G} не сюръективно. Отметим еще, что F вполне определено в соответствии с гипотезами относительно \bar{G} .

Реализация считается *канонической* тогда и только тогда, когда канонической является факторизация отображения f по X . Отсюда сразу следует, что соотношение (6.13) определяет единственное F . Очевидно и существование канонической реализации: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $X = \Omega/\ker f$ (в смысле структуры векторного пространства).

Пусть теперь $\hat{f} = \hat{H} \circ \hat{G}$ есть другая каноническая реализация f . Согласно утверждению (6.4), диаграмма

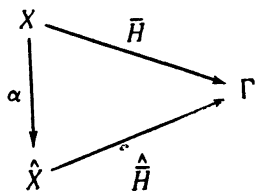
$$(6.14) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \nearrow \bar{G} & & \nwarrow \bar{H} & \\ \Omega & & & & \Gamma \\ & \searrow \hat{G} & & \nearrow \hat{H} & \\ & & \hat{X} & & \end{array}$$

(в центре диаграммы: вертикальная пунктирная стрелка $\alpha: X \rightarrow \hat{X}$ и горизонтальная стрелка $f: \Omega \rightarrow \Gamma$)

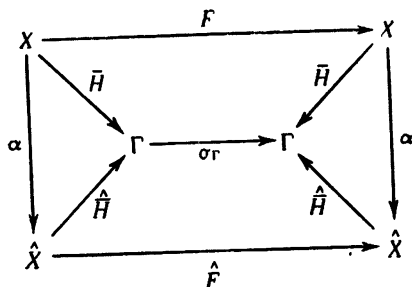
коммутативна, а отображение $\alpha: X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ является *единственным* изоморфизмом векторных пространств, согласующимся с коммутативностью этой диаграммы. А это позволяет доказать два последних отношения эквивалентности (1.7). Для доказательства первого из них объединим каждую из коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \bar{H} \downarrow & & \downarrow \bar{H} \\ \Gamma & \xrightarrow{\sigma_{\Gamma}} & \Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{F}} & \hat{X} \\ \hat{H} \downarrow & & \downarrow \hat{H} \\ \Gamma & \xrightarrow{\sigma_{\Gamma}} & \Gamma \end{array}$$

и дважды использованную коммутативную диаграмму



в диаграмму



Требуется показать, что внешний прямоугольник является коммутативным. Используя факт коммутативности исходных диаграмм, мы видим, что

$$\begin{aligned}\hat{H} \circ \alpha \circ F &= \bar{H} \circ F = \\ &= \sigma_{\Gamma} \circ \bar{H} = \\ &= \sigma_{\Gamma} \circ \hat{H} \circ \alpha = \\ &= \hat{H} \circ F \circ \alpha.\end{aligned}$$

Но так как \hat{H} взаимно однозначно, $\alpha \circ \hat{F} = F \circ \alpha$ и прямоугольная диаграмма коммутативна. А поскольку α есть некоторый изоморфизм, отсюда следует справедливость условия (1.7a).

(6.15) **Замечание.** Описанная процедура отличается от «стандартного» доказательства, приведенного раньше, только использованным математическим аппаратом. Например, здесь существование F доказывается с помощью σ_{Γ} . В доказательстве же с помощью теории модулей отображение σ_{Γ} использовалось для того, чтобы наделить Γ «подходящей» структурой модуля, после чего F можно было представить как отображение, индуцированное скалярным умножением в Γ (см. ниже). Более того, существование различных диаграмм, которыми мы пользовались для доказательства нужных соотношений, определяется, по сути дела, существованием

структуры модуля, гарантированного теоремой (4.9). Вопрос о том, какой из двух методов является более плодотворным, следует отнести к психологии индивидуальной научной работы. В определенных ситуациях метод диаграмм может быть весьма эффективным. (См., например, второе доказательство теоремы (11.14.).)

(6.16) **Замечание.** Не существует какой-нибудь важной причины, по которой нужно полагать, что

$$X_f = \Omega / \ker f$$

в качестве фундаментального определения пространства состояний. С тем же успехом можно положить, что $\Xi_f = f(\Omega)$. Эти два пространства *естественно* изоморфны, поскольку

$$[\omega]_f \text{ (подпространство пространства } \Omega) \approx f(\omega) \text{ (элемент пространства } \Gamma).$$

Точно так же вместо того, чтобы определять переходы в пространстве состояний как

$$F: [\omega]_f \mapsto [z \cdot \omega]_f = z \cdot [\omega]_f \text{ (операция } \cdot \text{ в } \Omega),$$

мы можем определять их как

$$F: f(\omega) \mapsto f(z \cdot \omega) = z \cdot f(\omega) \text{ (операция } \cdot \text{ в } \Gamma).$$

А так как достаточно подробное изложение этой ситуации не было опубликовано ранее, нет ничего удивительного в том, что в литературе и тот и другой формализм встречается почти с одинаковой частотой.

Может показаться, что абстрактный подход, свойственный этому параграфу, имеет мало общего с обычной математикой или конкретными численными расчетами. Но такое впечатление безусловно ошибочно. В § 10.10 мы найдем важные применения матричных многочленов и структурной теории линейных систем. Затем в § 10.11 мы покажем, что определение (6.1) непосредственно приводит к построению весьма хитроумного алгоритма численного синтеза реализации.

(6.17) **Исторические замечания.** Первоначальное доказательство приведенных результатов, полученное в 1962 г., было нескладным, и в работе Калмана [1963с] были опубликованы лишь одни результаты. Их доказательство основывалось на непосредственных преобразованиях интегралов из теорем (2.24) и (6.6) гл. 2; оно воспроизводится в приложении С к настоящей главе. В связи с этим интересны также замечания к теореме (13.19).

Вскоре после опубликования работы Калмана [1963с] стало ясно, что использованный аппарат можно было бы уточнить путем привлечения некоторых понятий теории автоматов, и в особенности

понятия отношения эквивалентности Нерода. Это понятие было подробно рассмотрено в гл. 6 на основе работы Арбиба [1965], завершенной примерно в середине 1964 г. Полезное замечание можно найти также в работе Калмана [1963с] сразу же после теоремы 7. Подход в рамках теории модулей разрабатывался весной и летом 1965 г., и первые результаты были опубликованы в статье Калмана [1965b].

После 1963 г. под давлением общественного научного мнения стало принятым называть «естественные» реализации «минимальными». Дело в том, что пространство состояний естественной реализации имеет минимальную *размерность*, и это полностью характеризует естественную реализацию (Юла [1966], стр. 534, сразу после уравнения (45)). Использовалось также и название «неприводимая», поскольку другие реализации, кроме естественных, всегда можно было «привести», отбросив излишние состояния (Калман [1965a]). В настоящее время стало ясным, что ни одно из этих названий не может служить полноценной заменой прилагательным «естественная» или «каноническая». Понятие «минимальной» размерности имеет смысл лишь в рамках теории векторных пространств, но в действительности круг приложений нашей теории существенно шире. «Приведение» реализаций — это интересная задача, но ее теория глубже, чем совокупность вопросов узкоцелевого характера, связанных со свойствами или построением естественных реализаций.

Принятый здесь метод изложения теории реализации (он будет использован также в § 10.10, 10.11 и 10.13) представляет собой один из основных результатов (и возможно, что это только начало) попытки найти взаимосвязь между теорией линейных систем и теорией автоматов средствами аппарата современной алгебры. Из общих соображений ясно, что картину, представленную здесь, вряд ли можно существенно улучшить или упростить.

Если же читатель заинтересуется дополнительными мотивировками, ходом эволюции основных идей или заметками для последующих исследований и т. п., для этого ему нужно обратиться к оригинальным статьям.

10.7 Циклические модули

Выше мы в основном старались выявить взаимосвязь между структурой модуля и динамическими свойствами системы. При этом нашей первой целью было установление эквивалентности исходных определений. Теперь же мы воспользуемся математическими свойствами модулей.

Предположим на время, что R есть произвольное (не обязательно коммутативное) кольцо, а X — произвольный R -модуль. Пусть Y — произвольное подмножество (не обязательно подмодуль)

модуля X . Напомним, что *аннулятором* A_Y множества Y называется подмножество

$$(7.1) \quad A_Y = \{r: r \in R \text{ и } r \cdot y = 0 \text{ при всех } y \in Y\}$$

кольца R . Из определения следует, что A_Y — (левый) идеал.

(7.2) **Определение.** Если для каждого x из X найдется такое $r_x \neq 0$, что $r_x \cdot x = 0$, то X называют модулем с *кручением*. (Это название возникло в алгебраической топологии и в нынешнем контексте не имеет интуитивной интерпретации.)

Нас интересует в первую очередь кольцо $R = K[z]$, и в этом случае R есть область главных идеалов; можно ввести следующее важное определение.

(7.3) **Определение.** Пусть X — произвольный модуль с кручением над $K[z]$, и пусть $A_X = K[z]\psi_X$. Тогда, если $\psi_X \neq 0$, то ψ_X называется *минимальным* (или *аннулирующим*) *многочленом модуля* X ¹⁾.

В § 10.8 мы увидим, что это определение в точности согласуется с определением минимального матричного многочлена. (Это понятие мы впервые использовали в рамках теории систем в § 2.3.)

(7.4) **Предложение.** Пусть X есть конечный $K[z]$ -модуль, порожденный t образующими, и пусть $\psi_X \neq 0$. Тогда $\dim X$ (как размерность векторного пространства) меньше или равна $t \cdot \deg \psi_X$.

Доказательство. Каждый элемент x из X представляет собой сумму членов $\pi_k \cdot g_k$ ($k = 1, \dots, t$). Каждое π_k можно привести по модулю ψ_X , не нарушая при этом суммы. Поэтому $x \in X$ определяется t многочленами степени, меньшей $\deg \psi_X$, что и требовалось доказать.

Позже мы выведем точную формулу для $\dim X$. Однако пока нас интересуют только те модули, свойства которых *полностью* определяются их минимальными многочленами.

Напомним, что R -модуль X называется *циклическим*²⁾ тогда и только тогда, когда он порождается одним элементом g . Структура циклических модулей очень проста.

(7.5) **Предложение.** Пусть X есть циклический R -модуль с образующей g над произвольным кольцом R . Тогда модуль X изоморфен факторкольцу R/A_g .

¹⁾ Пусть r_i — минимальный многочлен, обращающийся в нуль на i -й образующей X . Тогда если X не только модуль с кручением, но еще и конечен, то произведение всех r_i конечно, аннулирует X и, следовательно, $\psi_X \neq 0$.

²⁾ Это название и устарело, и неудачно, но установилось в литературе. Было бы лучше пользоваться буквальным переводом термина Бурбаки, согласно которому циклические модули называются «моногонными».

Доказательство. Рассмотрим R -гомоморфизм $\rho: R \rightarrow X: r \mapsto r \cdot g$ (здесь R рассматривается как R -модуль над собой). Свойство циклическости означает, что отображение ρ сюръективно. Более того, $\ker \rho = A_g$. Отсюда с помощью теоремы о гомоморфизмах сразу получаем нужное утверждение.

Этот простой результат имеет очень интересные и принципиально важные следствия для теории динамических систем.

Пусть $m = 1$. Тогда $\Omega = K[z]$ есть свободный циклический модуль, порождаемый 1 (многочленом, тождественно равным 1). Тогда для любого отображения вход — выход f имеем, что $K[z]$ -модуль $X_f = \Omega / \ker f$ также является циклическим и порождается многочленом $g = [1]_f$. Но согласно утверждению (7.5), аннулятор $A_g = \ker f = K[z]\psi_f$ состоит из всех таких многочленов ω , что $f(\omega) = 0$. При этом $\psi_f \neq 0$ есть многочлен наименьшей степени из этого множества. В результате получаем следующую последовательность все более явных эквивалентных описаний для X_f :

$$\begin{aligned} X_f &= K[z] / \ker f = \\ &= K[z] / K[z]\psi_f = \\ &= \{[\omega + \pi\psi_f : \pi \in K[z]] : \omega \in K^m[z]\}. \end{aligned}$$

Каждый класс эквивалентности $\{\omega + \pi\psi_f\}$ располагает *единственным* элементом $\tilde{\omega}$ наименьшей степени, равным остатку от деления ω на ψ_f . Совершенно ясно, что $\deg \tilde{\omega} < \deg \psi_f$. Подведем итог этим соображениям.

(7.6) **Теорема о представлении.** Если X есть некоторый циклический $K[z]$ -модуль с аннулирующим многочленом ψ , то $X \approx \mathcal{P}_{\deg \psi} = \{\text{все многочлены } \pi \in K[z], \text{ для которых } \deg \pi < \deg \psi\}$. В частности, это всегда справедливо, если $m = 1$ и $X = X_f$.

(7.7) **Обозначение.** С целью упрощения в некоторых формулах мы вынуждены будем иногда писать $\omega \bmod \psi$ вместо $\tilde{\omega}$, хотя такое обозначение, строго говоря, можно использовать лишь для класса по модулю ψ , а не для особого элемента этого класса.

(7.8) **Замечание.** Динамическое поведение циклического модуля X_f описывается, по сути дела, преобразованием: «входные воздействия \rightarrow состояния», которое можно представить в виде

$$\omega \mapsto [\omega]_f = \omega \bmod \psi_f = \tilde{\omega}.$$

С интуитивной точки зрения X_f можно рассматривать как устройство для «распознавания образов». Действительно, входное воздействие ω , поданное на X_f , запоминается в виде остатка $\tilde{\omega}$ от деления на ψ_f . А так как ψ_f может быть весьма сложным, запоминаемый образ $\tilde{\omega}$ может не иметь никакого очевидного сходства

с входным образом ω , но с алгебраической точки зрения операция, осуществляемая системой, предельно проста.

Некоторые интересные частные случаи минимальных многочленов приведены в следующих пяти примерах.

(7.9) **Пример.** $\psi_f(z) = z$. Тогда $[\omega]_f = \tilde{\omega} = \omega_0$, т. е. равно последнему из принятых значений входного воздействия. У такой системы «память» распространяется только на одну единицу времени.

(7.10) **Пример.** $\psi_f(z) = z^k$. Теперь $[\omega]_f = \tilde{\omega} = \omega_0 + \dots + \omega_{k-1}z^{k-1}$. Эта система «помнит» k последних значений входного воздействия.

(7.11) **Пример.** $\psi_f(z) = z - 1$. Это означает, что $z = 1 \bmod \psi_f$ и, следовательно,

$$[\omega]_f = \tilde{\omega} = \omega_0 + \dots + \omega_r \quad (r = \deg \omega).$$

Такая система является интегратором «или системой усреднения».

(7.12) **Пример.** $\psi_f(z) = z^k - 1$. Теперь $z^{kl}\omega = \omega \bmod \psi_f$ при любом $l \geq 0$. Это означает, что система чувствительна к периодическим воздействиям с периодом k . Такие воздействия подчеркиваются системой, в то время как непериодические выравниваются (усредняются). (*Упражнение:* напишите явную формулу для $[\omega]_f$.)

(7.13) **Пример.** $\psi_f(z) = z^k - \alpha$. Теперь $z^{kl}\omega = \alpha^l \omega \bmod \psi_f$. Это означает, что система по-прежнему чувствительна к периодическим воздействиям с периодом k , но прошлые значения входных воздействий могут усиливаться или ослабляться системой в зависимости от того, больше единицы величина α или меньше.

Рассмотрим теперь несколько типичных задач, которые можно сформулировать и красиво решить с помощью развитого аппарата. В каждом случае мы будем предполагать, что X есть циклический $K[z]$ -модуль с образующей g и аннулирующим многочленом ψ . В силу теоремы (7.6) мы можем тогда написать, что

$$x = \xi \cdot g = \tilde{\xi} \cdot g,$$

если $\xi = \tilde{\xi} \bmod \psi$.

(7.14) **Задача.** Вычислить последовательность ω , преобразующую x в 0. Другими словами, требуется найти решение ω уравнения $x \circ \omega = 0$. В обозначениях теории модулей (5.4) это означает, что

$$x \circ \omega = (z^{1+d}\xi + \omega) \cdot g = 0,$$

где $x = \xi \cdot g$, а d есть произвольное целое, не меньшее $\deg \omega$ ¹⁾.

¹⁾ Возможность, что $d > \deg \omega$, соответствует ситуации, в которой первые $d - \deg \omega$ значений входного воздействия полагаются равными нулю. Нам придется рассматривать этот случай, и у нас нет другой возможности описать его в рамках теории модулей.

Поскольку $1 \cdot g \neq 0$ (в противном случае все тривиально), ясно, что ω должно удовлетворять соотношению

$$(7.15) \quad z^{1+d}\xi + \omega = 0 \bmod \psi, \quad d \geq \deg \omega.$$

Может показаться, что это уравнение трудно решить, поскольку $\deg \omega$ входит в него нелинейным образом (в показатель степени). Но так как уравнение должно выполняться только по модулю ψ , мы можем выбрать $\deg \omega$ равным $r = d$ произвольным образом при условии, что $r \geq n - 1$. Тогда решение имеет следующий вид:

$$\omega = -z^{1+r}\xi + v\psi,$$

где $v \in K[z]$ и выбрано так, чтобы $\deg \omega$ действительно совпало бы с r . При этом выясняется, что неравенство $d \geq \deg \omega$ вообще несущественно.

Но если нам нужно найти решение уравнения (7.15), такое, чтобы $\deg \omega$ было минимальным, то ситуация оказывается много сложнее. (Она аналогична простейшей задаче на оптимальное быстроедействие системы с дискретным временем.) Нам придется полагать, что

$$\deg \omega = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \deg \tilde{z^2\xi} = 1,$$

$$\deg \omega = 2 \text{ тогда и только тогда, когда } \deg \tilde{z^3\xi} = 2$$

и т. д. (Упражнение: доведите задачу до конца для различных интересных значений ψ .)

(7.16) *Задача.* Найти все периодические движения, проходящие через x и обладающие периодом q . Мы будем отыскивать все ω степени не большей $q - 1$ и такие, что

$$x \circ \omega = x.$$

В обозначениях теории модулей, где $x = \xi \circ g$, это условие эквивалентно уравнению

$$z^q\xi + \omega = \xi \bmod \psi,$$

откуда следует, что

$$(7.17) \quad \omega = (1 - z^q)\xi \bmod \psi.$$

Если $q \geq \deg \psi$, то получить решение, как и раньше, несложно. Если же $q < n$ и ξ фиксировано, то решение может не существовать, если только не выполняется соотношение $z^q = 1 \bmod \psi$. В последнем случае все состояния системы в свободном движении являются периодическими с периодом q .

Интересна также и обратная задача.

(7.18) *Задача.* Найти все состояния системы, становящиеся периодическими под воздействием входной последовательности ω . Эта

задача эквивалентна решению уравнения (7.17) при ξ , определенном заданным входным воздействием ω . Для этого потребуем, чтобы $(z^q - 1) \neq 0$ был единицей (обратимым элементом) в кольце $K[z]/K[z]\psi$. Напомним, что в этом кольце элемент v является единицей тогда и только тогда, когда он не является делителем нуля, а v есть делитель нуля, если $v|\psi$ (см. пример (А.13)). Если ω есть единица, а $z^q - 1$ не есть единица, то искомое ξ не существует. В противном случае ситуация несколько сложнее. Окончательное решение задачи оставляем читателю в качестве упражнения.

(7.19) **Задача.** Построить автомат, распознающий входное воздействие φ и не реагирующий на входное воздействие θ . Это задача распознавания (точнее классификации) образов. На языке теории модулей это означает, что мы ищем такое ψ , что $\psi \nmid \varphi$, но $\psi|\theta$. Решение задачи возможно тогда и только тогда, когда $\theta \nmid \varphi$.

(7.20) **Задача.** Найти автомат, распознающий φ как состояние $\tilde{\varphi} \cdot g$. Здесь ψ должно удовлетворять уравнению $\varphi = \tilde{\varphi} \bmod \psi$, что эквивалентно уравнению

$$\psi | (\varphi - \tilde{\varphi}), \quad \deg \psi > \deg \tilde{\varphi}.$$

Его решение безусловно существует, но в общем случае не будет единственным.

(7.21) **Замечание.** Имеется тесная связь между свойством цикличности и «каноническими представлениями» (5.8) из гл. 2. Рассмотрим линейную динамическую систему Σ и предположим, что X_Σ есть циклический $K[z]$ -модуль с образующим g_Σ и аннулятором $\tilde{\psi}_\Sigma$. Тогда $X = \mathcal{P}_{\deg \psi_\Sigma}$. Поэтому для X_Σ , как векторного пространства, множество

$$\{g, z \cdot g, \dots, z^{n-1} \cdot g\}, \quad \text{где } n = \deg \psi_\Sigma,$$

служит базисом. А относительно этого базиса оператор $x \mapsto z \cdot x$ может быть представлен матрицей

$$(7.22) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix},$$

в которой элементами последнего столбца служат коэффициенты многочлена ψ , взятые с обратным знаком. Это получается сразу, если записать ψ в виде

$$z^n = -\alpha_1 z^{n-1} - \dots - \alpha_n \bmod \psi.$$

Заметим, что операция сравнения по модулю заменяет собой в теории модулей теорему Кэли — Гамильтона. (Каноническое представление (5.8) из гл. 2 выводится аналогичным образом.)

Тесно связан со всем вышеизложенным следующий классический критерий.

(7.23) **Критерий.** Характеристический многочлен χ_F квадратной матрицы F над K равен ее минимальному многочлену ψ_F тогда и только тогда, когда в K^n найдется такой базис, что F имеет вид (7.22), т. е. тогда и только тогда, когда F подобна матрице (7.22).

Доказательство. Достаточность. Пусть F есть матрица, равная или подобная матрице (7.22). Многочлен ψ , построенный по последнему столбцу матрицы (7.22), бесспорно есть многочлен наименьшей степени, такой, что $\psi \cdot x = 0$ при всех x (т. е., что эквивалентно, такой, что $\psi(F) = 0$). Поэтому $\psi = \psi_F$, т. е. равно минимальному многочлену матрицы F . (См. также следствие (3.6) из гл. 2.) Прямое же вычисление χ_F , основанное на (7.22), показывает, что

$$\psi(z) = \det(zI - F) = \chi_F(z),$$

т. е. равно характеристическому многочлену F (напомним, что χ_F не зависит от выбора базиса, по которому строится матрица F).

Необходимость. Вместо фиксированной матрицы F можно с тем же успехом рассматривать $K[z]$ -модуль, индуцированный матрицей F (см. предложение 5.1). Предположим, что базиса требуемого типа не существует. Тогда каждое множество $\{x, z \cdot x, \dots, z^{n-1} \cdot x\}$ является линейно зависимым, т. е. каждое x аннулируется многочленами из $A_x = K[z]\pi_x$, где $\deg \pi_x < n$. Ясно, что X_F порождается некоторым конечным множеством $\{g_1, \dots, g_l\}$, где $l \leq n$. Мы утверждаем, что аннулятор $X_F A_{X_F} = K[z]\psi_F$ множества X_F порождается многочленом ψ_F , который является наименьшим общим кратным многочленов $\{\pi_{g_1}, \dots, \pi_{g_l}\}$. Это непосредственно следует из того, что в рассматриваемой ситуации все аннуляторы являются главными идеалами. Действительно, поскольку ψ_F аннулирует g_i , имеем $\psi_F \in A_{g_i}$ и, следовательно, $\pi_{g_i} \mid \psi_F$ при любых $i = 1, \dots, l$. С другой стороны, каждое общее кратное многочленов $\{\pi_{g_1}, \dots, \pi_{g_l}\}$ аннулирует все элементы множества X_F . Рассмотрим теперь вектор

$$\hat{g}_1 = g_1, \hat{g}_2 = g_1 + \alpha_2 g_2, \dots, \hat{g}_l = g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_l g_l,$$

где $\alpha_k \in K$ выбираются так, чтобы каждый вектор \hat{g}_k был ненулевым. (Очевидно, что это всегда возможно.) По индукции легко доказать, что $\pi_{\hat{g}_k}$ есть наименьший общий делитель многочленов $\{\pi_{g_1}, \dots, \pi_{g_k}\}$. Поэтому $\pi_{\hat{g}_l} = \psi_F$, и по предположению $\deg \psi_F >$

$> \pi = \deg \chi_F$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы.

(7.24) **Упражнение.** Найти матрицу, не удовлетворяющую критерию (7.23).

(7.25) **Замечание.** В дальнейшем мы станем называть матрицу F *циклической* тогда и только тогда, когда F удовлетворяет критерию (7.23). Таким образом, матрица F *циклическая* тогда и только тогда, когда $K[z]$ -модуль X_F , индуцированный матрицей F с помощью соотношения $z \cdot x = Fx$ (см. предложение (5.1)), является циклическим относительно некоторого $g \in K^n$.

(7.26) **Замечание.** Согласно теореме о представлении (7.6) *состояние динамической системы можно описывать на том же языке, что и входные воздействия, т. е. на языке многочленов*. В этом смысле настоящий подход к линейной теории систем устраняет кажущуюся несогласованность между частотными и временными методами анализа систем.

(7.27) **Замечание.** Как это ни обременительно, но приходится признать, что пространство состояний X_f имеет более сложную структуру, чем утверждается в теореме (7.6). Пространство X_f является не только абелевой группой, но по крайней мере при $m = 1$ оно есть к тому же и кольцо с умножением

$$(7.28) \quad [\omega]_f \cdot [\omega']_f = [\omega\omega']_f,$$

где $\omega\omega'$ — обычное произведение в $K[z]$. Произведение (7.28) вполне определено, так как $\omega \cdot [\omega']_f = [\omega\omega']_f$ есть вполне определенное скалярное произведение на X_f . В настоящее время неизвестно содержательной интерпретации операции (7.28) для теории систем, хотя аналогичное явление отмечалось и в теории автоматов (Дэй, Уоллес [1967]).

В следующем параграфе мы убедимся, что полученные результаты можно обобщить на случай произвольных конечных модулей с кручением.

10.8 Структура конечных $K[z]$ -модулей

Центральный результат теории модулей над областью главных идеалов состоит в том, что *каждый* такой модуль представляет собой простую комбинацию, а именно сумму циклических модулей. Пользуясь интуитивно более ясным языком, мы можем сказать, что линейные системы строятся в виде суммы простейших строительных блоков, каждый из которых представляет собой циклическую систему.

При обычном подходе к теории линейных систем всегда подчеркивается важность скалярных линейных систем (имеющих

$m = 1$ и $p = 1$), которые являются неизбежно циклическими. Но в этой теории отсутствовал систематический подход к изучению наиболее общего случая. Некоторые попытки в этом направлении были сделаны в начале 40-х годов, но до того, как появилась излагаемая здесь теория, основанная на теории модулей, никакой исчерпывающей теории линейных систем не было. Другими словами, *линейные системы во всей их сложности яснее всего описываются в рамках теории модулей. И обратно, понимание этой сложности эквивалентно неявному пониманию аппарата теории модулей.*

Приведем теперь строгую формулировку одной основной теоремы.

(8.1) Основная структурная теорема для конечных модулей над областью главных идеалов R . Пусть X — такой R -модуль. Тогда X изоморфен прямой сумме циклических модулей:

$$X \approx R/R\psi_1 \oplus \dots \oplus R/R\psi_q \oplus R \oplus \dots \oplus R,$$

где число слагаемых прямой суммы не превышает числа образующих модуля X ; здесь $\psi_i \in R$ являются единственными циклическими модулями (с точностью до сравнения по модулю единицы модуля R) и удовлетворяют условию ψ_{i+1}/ψ_i , $i = 1, \dots, q-1$.

(8.2) Определение. Модули $\psi_i \in R$ называются инвариантами модуля X .

Очень важные с методической точки зрения доказательства этого основного результата читатель найдет в работах Кэртиса и Рейнера [1962, § 16], Бурбаки [Алгебра, гл. 7], Ленга [1965, гл. XV, § 2], Джекобсона [1953, гл. 3]. Все эти доказательства совершенно различны по стилю, и безусловно полезно познакомиться с *каждым* из них. Сама же теорема представляет собой дословный перевод на язык теории модулей классической теоремы об инвариантных многочленах (см. (A.17)). В § 10.10 мы применим алгоритм, используемый для доказательства этой теоремы, с целью вычислить инварианты модуля X и изоморфизм из теоремы (8.1). Эти вычисления можно рассматривать как косвенное доказательство теоремы (8.1).

С чисто математической точки зрения теорема (8.1) может показаться скучным упражнением в абстракции, поскольку все доказательство (особенно в изложении Кэртиса и Рейнера [1962]) критическим образом зависит от алгоритма определения инвариантов модуля X . Однако для нас эта формулировка теоремы с привлечением теории модулей чрезвычайно важна, а алгоритм представляет интерес лишь как одно из вычислительных средств. Поэтому математическая тенденция добиваться большей общности

(переход от векторных пространств к модулям) может черпать вдохновение и в приложениях к решению конкретных задач теории динамических систем.

(8.3) Интерпретация. Структурная теорема в том общем виде, как она сформулирована выше, охватывает и случай, когда X представляет собой «смесь» циклических модулей с кручением $(R/R\psi_i)$ и свободных циклических модулей (R) . Если X — модуль с кручением, то слагаемые последнего типа отсутствуют и, согласно условию делимости, аннулирующий многочлен ψ модуля X совпадает с ψ_1 . Ясно, что X циклический тогда и только тогда, когда $q = 1$.

(8.4) Замечание. Прилагательное «конечный» в формулировке теоремы соответствует ситуации, в которой у системы «конечное число входов». Это ограничение не сужает существенно образом область применимости теоремы (8.1). Но предположение, согласно которому R представляет собой область главных идеалов, не слишком желательно, поскольку оно исключает, например, возможность $R = \mathbb{Z}[z]$ (см. упражнение (A.16)). Хотя более общие структурные теоремы пока еще не известны в математической литературе, имеются явные указания на то, что такие теоремы можно будет вывести с помощью соображений теории систем.

Отметим одно непосредственное и исключительно полезное следствие теоремы (8.1), представляющее собой усиление результата (7.4).

(8.5) Следствие. Пусть X — модуль с кручением над $K[z]$ с аннулирующим многочленом ψ . Тогда

$\dim X$ (как размерность векторного пространства) =

$$= \sum_{i=1}^q \deg \psi_i \leq q \cdot \deg \psi.$$

Доказательство получается сразу из теоремы (7.6).

Имеется еще и вторая структурная теорема, обобщающая метод разложения на элементарные дроби в теории преобразований Лапласа.

Введем для каждого модуля X над коммутативным кольцом R обозначение

$X_r = \{x: x \in X, r^q \cdot x = 0 \text{ для фиксированного } r \in R \text{ и некоторого } g > 0\}.$

Легко убедиться (с помощью коммутативности), что X_r есть R -модуль. Например, если $X \approx R/Rr^s$, то $X = X_r$.

(8.6) Структурная теорема для конечных модулей с кручением над областью главных идеалов R . Предположим, что X — такой

R -модуль с аннулирующим многочленом ψ . Пусть, далее,

$$\psi = \varepsilon \rho_1^{n_1} \dots \rho_s^{n_s} \quad (\varepsilon = \text{единица} \in R)$$

есть представление ψ простыми делителями ρ_i .

Тогда X — прямая сумма модулей с кручением X_{ρ_i} .

Если $R = K[z]$, то простыми элементами модуля R являются неприводимые многочлены в $K[z]$. В частности, если $K = \mathbb{R}$, то ρ_i являются многочленами первой или второй степени в зависимости от того, являются ли корни ρ_i вещественными или комплексными. Если же $K = \mathbb{C}$, то каждый многочлен ρ_i есть многочлен первой степени.

Доказательство теоремы (8.6) очевидно. Отсылаем читателя к книгам Бурбаки [Алгебра, гл. 7, § 2, п. 1] и Ленга [1965, гл. XV, § 2].

Теоремы (8.1) и (8.6) — это по существу все, что нужно знать для того, чтобы свести изучение линейных систем общего вида к изучению простых линейных систем. Например, применяя сначала теорему (8.6), а затем теорему (8.1), мы получим абстрактный эквивалент процедуры разложения на простейшие дроби с кратными полюсами; см. также § 88 монографии Ван дер Вардена [1931].

Инварианты $K[z]$ -модуля можно использовать для определения соответствующих инвариантов матриц над K . (Интересно отметить, что сначала была решена обратная задача!) Дадим еще одно обобщение замечания (7.25).

(8.7) Определение. Пусть $A: V \rightarrow V$ есть произвольный эндоморфизм K -векторного пространства V (или его матричного представления), и пусть V_A есть $K[z]$ -модуль, индуцируемый в V эндоморфизмом A (см. предложение (5.1)). *Инвариантами* эндоморфизма A называются инварианты модуля V_A .

Как известно (Ван дер Варден [1931], т. 2), инварианты эндоморфизма A определяют жорданову каноническую форму эндоморфизма A . Основная масса результатов теории линейных систем может быть получена с помощью приведения матриц к их жордановым каноническим формам. Теория модулей позволяет воспользоваться инвариантами *непосредственно*, а не через жордановы канонические формы. Само название «инварианты» (не зависящие от базиса) становится яснее, если ψ_i определять в рамках теории модулей.

10.9 Передаточные функции

Один из основных результатов традиционной теории линейных систем состоит в введении понятия передаточной функции, связанной с отображением вход — выход f (по сути дела, это «пре-

образование» $f(1)$). Обычный подход к определению передаточных функций требует выяснения факта сходимости. В результате этого иногда создается ложное представление о том, что частотными методами (с помощью передаточных функций) можно изучать лишь устойчивые системы.

Однако мы увидим, что существование передаточных функций в конечномерном случае — это чисто алгебраический факт, не имеющий ничего общего с вопросами сходимости. Основным здесь является существование такой структуры $K[z]$ -модуля в Γ , для которой отображение вход — выход f служит гомоморфизмом модулей (см. § 10.3). Точнее говоря, поскольку f есть некоторый $K[z]$ -гомоморфизм, справедливо, что

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^m \omega_k f(e_k).$$

Последнее соотношение показывает, что f полностью определяется заданием элементов $e_i = f(e_i)$ из Γ . Каждое e_i представляет собой некоторый формальный степенной ряд. Идея «передаточной функции» эквивалентна предложению рассматривать каждый такой степенной ряд как формальное разложение отношения векторного и скалярного многочленов.

Основное допущение, которым мы воспользуемся, состоит в том, что

(9.1) X_f есть модуль с кручением с аннулирующим многочленом ψ_f .

Из сказанного выше следует, что для f существует факторизация, описываемая коммутативной диаграммой $K[z]$ -гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} & X_f & \\ \bar{G} \nearrow & & \searrow \bar{H} \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

Рассмотрим образующие e_k ($k = 1, \dots, m$) свободного $K[z]$ -модуля Ω . Согласно диаграмме, имеем

$$\begin{aligned} f(\psi_f \cdot e_k) &= (\bar{H}_f \circ \bar{G}_f)(\psi_f \cdot e_k) \quad (\text{факторизация отображения } f) = \\ &= \bar{H}_f(\psi_f \cdot \bar{G}_f(e_k)) \quad (\bar{G} \text{ есть } K[z]\text{-гомоморфизм}) = \\ &= 0 \quad (\psi_f \text{ аннулирует } X_f). \end{aligned}$$

Но с другой стороны,

$$f(\psi_f \cdot e_k) = \psi_f \cdot f(e_k) \quad (f \text{ есть } K[z]\text{-гомоморфизм}).$$

Поэтому $\psi_f \cdot f(e_k) = 0$ в качестве элемента $K[z]$ -модуля Γ . С учетом определения скалярного умножения в Γ можно заключить тогда, что $\psi_f f(e_k)$ (обычное произведение формального степенного ряда и многочлена) принадлежит пространству $K^p[z]$. Мы запишем это в виде

$$(\psi_f f(e_k))(z) = \theta_k(z), \quad \theta_k \in K^p[z].$$

Требуемый результат получается сразу из следующей простой леммы.

(9.2) **Лемма.** Пусть $\gamma \in \Gamma \subset K^p[[z^{-1}]]$, $\pi \in K[z]$, $\delta \in K^p[z]$, а $\deg \delta < \deg \pi$. Тогда тождество

$$\pi\gamma = \delta$$

эквивалентно соотношению

$$\gamma = \delta/\pi,$$

где / означает формальное деление на многочлен, в результате которого получается степенной ряд по z^{-1} .

Доказательство. Выпишите подробно оба тождества и проверьте их эквивалентность почленно.

Согласно приведенной лемме, вместо $f(e_k) = e_k$ можно рассматривать отношение $w_k = \theta_k/\psi_f$. Заметим, что, поскольку $w_k \in \Gamma$, необходимо иметь $\deg \theta_k < \deg \psi_f$, т. е. вектор w_k будет описывать правильную рациональную дробь (обращающуюся в нуль при $z \rightarrow \infty$). Кроме того, если ψ — наименьший общий знаменатель всех w_k , то $\psi_f = \psi$.

Справедливо и обратное утверждение: любое конечное семейство правильных рациональных дробей $w_k \in \Gamma$, $k = 1, \dots, t$, индуцирует $K[z]$ -гомоморфизм

$$(9.3) \quad f: \Omega \rightarrow \Gamma: e_k \mapsto w_k.$$

Подводя итог, мы получим следующую важную теорему.

(9.4) **Теорема о представлении.** Пусть $f: \Omega \rightarrow \Gamma$ есть некоторый $K[z]$ -гомоморфизм с аннулирующим многочленом ψ_f . Тогда f однозначно определяется своей передаточной матрицей¹⁾ W_f размера $r \times t$, столбцами которой служат r -мерные векторы правильных рациональных дробей $w_k = f(e_k)$, $k = 1, \dots, t$, независимой переменной z . Обратно, любая матрица W правильных дробно-рациональных элементов индуцирует по правилу (9.3) единственный $K[z]$ -гомоморфизм f_W , а наименьший общий знаменатель ψ_W эле-

¹⁾ Принятый в классической теории термин «передаточная функция» (иногда заменяемый на «системную функцию») неудачен, но слишком укоренился в литературе.

ментов матрицы W является аннулирующим многочленом ψ_f для $K[z]$ -модуля X_f , индуцированного гомоморфизмом f_W .

Короче говоря, объекты f и W эквивалентны¹⁾.

Теперь мы имеем возможность вычислять $f(\omega)$ по следующим правилам:

1. Умножим W_f на ω (обычное умножение дробно-рациональной матрицы на вектор многочленов).

2. Последовательным делением разложим каждый элемент в ряд по возрастающим степеням z^{-1} .

3. Отбросим все члены с неположительными степенями z^{-1} . В результате получается $f(\omega)$.

Члены, отбрасываемые на 3-м этапе, соответствуют реакции системы в моменты времени, предшествующие $t = 0$, и в момент $t = 0$. Точнее говоря, эти члены описываются слагаемым Δ из уравнения

$$(9.5) \quad W_f \omega = \Theta_f \omega / \psi_f = \Delta + \widetilde{\Theta_f \omega} / \psi_f,$$

где $\Theta_f = (f(e_1)\psi_f, \dots, f(e_m)\psi_f)$ есть многочленная матрица (размера $p \times n$), а \sim есть операция выбора элемента наименьшей степени в классе эквивалентности многочленов по модулю ψ_f . (Вспомните теорему (7.6).) Приведенное уравнение показывает, что $f(\omega)$ зависит лишь от $\Theta_f \omega \bmod \psi_f$. В связи с этим первое из приведенных выше правил мы можем упростить, заменив его следующим.

1'. Умножим $W_f = \Theta_f / \psi_f$ на ω , вычисляя произведение в кольце $K[z]/K[z]\psi_f$ и всегда используя лишь элементы наименьшей степени из каждого класса эквивалентности.

После этой замены правило 2 остается таким же, как и раньше, а в правиле 3 уже нет никакой необходимости.

(9.6) **Вывод.** Понятия «передаточная функция» и «сравнение по модулю ψ » тесно связаны между собой.

(9.7) **Обозначение.** По аналогии с обозначениями, принятыми для Γ , договоримся, что

$W\omega$ — обычное умножение степенных рядов на многочлены, а

$\cdot W \cdot \omega$ — умножение, описанное выше, результат которого рассматривается как степенной ряд, у которого отброшены все члены с неположительными степенями z^{-1} .

Правила вычисления, описанные выше, эквивалентны возникающим в обычной теории z -преобразований. Поэтому все обычные

¹⁾ Каждый раз, когда мы говорим о матрицах передаточных функций, мы всегда будем предполагать (если этот вопрос вообще возникает), что элементами матрицы W являются отношения взаимно простых многочленов.

результаты (например, из книги Фримэна [1961]) остаются справедливыми и для нашей теории. Приведем теперь одну интересную задачу, решение которой послужит иллюстрацией описанных вычислений.

(9.8) **Задача.** Для заданной входной последовательности ω ($\deg \omega = -t_{-1}$) из Ω найти начальное состояние x из X_f (где X_f — модуль с кручением с аннулятором ψ_f) в момент $t = t_{-1}$, такое, что реакция системы окажется тождественно равной нулю при всех $t > t_{-1}$. Поскольку X_f является полностью достижимой, любое $x \in X_f$ можно представить в виде $x = [\xi]_f$, где $\xi \in \Omega$. Поэтому условия задачи можно записать в виде уравнения

$$z^{-\deg \omega} W_f \omega + W_f \cdot \xi = 0$$

или словами: выражение $z^{-\deg \omega} W_f \omega$ должно быть выходной последовательностью системы, т. е. это выражение должно принадлежать $f(\Omega)$. Более ясное эквивалентное условие выглядит следующим образом:

$$(9.9) \quad \theta_f \omega = -z^{\deg \omega} \theta_f \xi.$$

Для упрощения задачи рассмотрим только скалярный вариант этого уравнения, т. е. предположим, что $m = p = 1$ и что, следовательно, можно записать соотношение $\theta_f = \theta_f \in K[z]$. (Решение общей задачи потребует привлечения теории, развитой в последнем параграфе, и мы оставляем его читателю в качестве нетривиального упражнения.) Очевидное необходимое условие существования ξ состоит в том, что $z^{\deg \omega} |\theta_f \omega$. В этом случае $\sigma = \theta_f \omega / z^{\deg \omega} \in K[z]$ и, естественно, $\deg \sigma < \deg \psi_f$. Требуется решить уравнение

$$\sigma = -\theta_f \xi \bmod \psi_f.$$

Но θ_f и ψ_f взаимно просты, так как в противном случае ψ_f не может быть минимальным многочленом модуля X_f . Поэтому (см. (A.13)) θ_f является единицей кольца $K[z]/K[z]\psi_f$. Отсюда следует, что θ_f^{-1} существует в этом кольце, и его представлением является многочлен степени, меньшей чем $\deg \psi_f$. Итак, имеем

$$\xi = \theta_f^{-1} \sigma \bmod \psi_f = \theta_f^{-1} \sigma + \alpha \psi_f, \quad \alpha \in K[z],$$

и, следовательно,

$$\theta_f \xi = \theta_f (\theta_f^{-1} \sigma + \alpha \psi_f) = \sigma + \beta \psi_f,$$

откуда находим, что $\theta_f \xi = \sigma$. Таким образом, мы доказали, что поставленная задача имеет решение тогда и только тогда, когда $\theta_f \omega$ содержит $z^{\deg \omega}$ в качестве множителя. Это справедливо, в частности, каждый раз, когда $\omega(z) = \kappa z^q$, $\kappa \in K$, $q \geq 0$.

10.10 Применения алгоритма вычисления матричных инвариантов

Структурная теорема (8.1) для конечных модулей над областью главных идеалов впервые появилась в математике в форме так называемой «теоремы об инвариантах матричных многочленов» (см. (A.17)). Для нас важность этого результата заключается в том, что его доказательство дает *алгоритм* вычисления инвариантов, а знание инвариантов позволит решить задачу определения структуры линейной системы.

Теперь мы попробуем связать воедино абстрактную теорию из § 10.8 и алгоритм вычисления матричных инвариантов. При этом нас будут больше всего интересовать вопросы, связанные с теорией реализации. Читателю следует сравнить материал этого параграфа с абстрактными доказательствами из § 10.6, а также с алгоритмом линейной алгебры, описанным в следующем параграфе и *не требующим* определения инвариантов.

Начнем с одного элементарного соображения.

(10.1) **Замечание.** Напомним, что $\psi = \psi_W$ есть наименьший общий знаменатель правильных дробно-рациональных элементов матрицы W (теорема (9.4)). Это означает, что все элементы матрицы ψW — *многочлены*. Но в соответствии с теоремой об инвариантах (теорема (A.17)) имеем

$$(10.2) \quad \psi W = A \Lambda B,$$

где $\det A$ и $\det B$ являются единицами в $K[z]$, а матрица Λ диагональна и единственна с точностью до единиц в $K[z]$. Тем более справедливо и следующее представление:

$$(10.3) \quad \psi W = PLQ \bmod \psi,$$

в котором $\det P$ и $\det Q$ являются единицами в $K[z]/K[z]\psi$, а матрица L диагональна и единственна с точностью до единиц в $K[z]/K[z]\psi$. Действительно, представление (10.3) тривиальным образом получается из (10.2). Для этого достаточно заменить каждый многочлен π в уравнении (10.2) его каноническим представителем наименьшей степени $\tilde{\pi}$ из класса эквивалентности π по модулю ψ_W . Итак, запишем

$$(10.4) \quad \psi W = \widetilde{\psi W} = \tilde{A} \tilde{\Lambda} \tilde{B} + \psi V = PLQ + \psi V,$$

где V — подходящая матрица многочленов. В последующем нам пригодится более слабое из представлений, а именно (10.3). С его помощью мы получим определенную свободу вычислений. Например, алгоритм вычисления инвариантов можно будет использовать

над кольцом $K[z]/K[z]\psi$, а не над кольцом $K[z]$. (Упражнение. Выясните, какие изменения в программе расчетов для этого потребуются и какую экономию машинного времени это даст.)

С помощью представления (10.3) можно быстро найти все инварианты модуля X_{fW} , соответствующего матрице W . Различные этапы этой процедуры представляют, по сути дела, перегруппировку членов в правой части уравнения (10.3). При этом основная идея состоит в том, чтобы вычислить класс эквивалентности $[0]_{fW}$ отображения вход — выход $f_W: \omega \mapsto W \cdot \omega$, соответствующего матрице W .

(10.5) Вычислительный алгоритм.

1. Для того чтобы входное воздействие $\omega \in K^m[z]$ на систему X_{fW} переводило ее в состояние 0, необходимо и достаточно, чтобы либо $\bar{G}(\omega) = 0$, либо $W \cdot \omega = 0$, либо $W\omega \in K^p[z]$, либо $(\psi W)\omega = 0 \bmod \psi$.

2. Согласно представлению (10.2), $(\psi W)\omega = 0 \bmod \psi$ тогда и только тогда, когда $\Lambda Q\omega = 0 \bmod \psi$, поскольку $\det P$ является единицей в $K[z]$ и, следовательно, единицей в $K[z]/K[z]\psi$.

3. Заменим переменные, положив $\omega \mapsto \hat{\omega} = Q\omega$. Это отображение взаимно однозначно из-за того, что $\det Q$ есть единица в $K[z]/K[z]\psi$. Точнее говоря, $\omega \mapsto Q\omega$ есть изоморфизм $K[z]$ -модуля.

4. Условие $\bar{G}(\omega) = 0$ эквивалентно теперь условию $\tilde{\Lambda}\hat{\omega} = 0 \bmod \psi$. Представим $\tilde{\Lambda}$ в виде $\text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_q, 0, \dots, 0\}$. Согласно теореме об инвариантах, $\tilde{\lambda}_i$ однозначно определяются видом W с точностью до единиц в $K[z]$, и $\tilde{\lambda}_i | \tilde{\lambda}_{i+1}$, $i = 1, \dots, q-1$. Кроме того, пусть $\mu_i = (\tilde{\lambda}_i, \psi)$ (наибольшее общее кратное), а $\psi_i = \psi / \mu_i$. Тогда $\tilde{\lambda}_i / \mu_i$ является единицей в $K[z]/K[z]\psi$ для всех $i = 1, \dots, q-1$. Поэтому приходится рассматривать три случая: (i) $\tilde{\lambda}_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$; (ii) $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = q+1, \dots, r = \text{rank } \psi W$; (iii) $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i = 0$, $i = r+1, \dots, \min(m, p)$. В результате получим, что $\tilde{\Lambda}\hat{\omega} = 0 \bmod \psi$ тогда и только тогда, когда

$$\hat{\omega}_i = \begin{cases} 0 \bmod \psi_i & i = 1, \dots, q; \\ \text{произвольно,} & i = q+1, \dots, \min(m, p). \end{cases}$$

5. Каждое ψ_i удовлетворяет условию делимости *противоположного* относительно условия для $\tilde{\lambda}_i$ вида. Поэтому $\psi_{i+1} | \psi_i$, $i = 1, \dots, q-1$. Более того, $\psi_1 = \psi$, поскольку ψ — наименьший общий знаменатель W .

Подведем итог этим вычислениям. Учитывая, что $X_f \approx \Omega/[0]_f$, и принимая во внимание соображения (10.5.4), мы сможем доказать следующее предложение,

(10.6) **Предложение.** Элементы из X_{f_W} изоморфны q -мерным векторам

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \bmod \psi_1 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_q \bmod \psi_q \end{bmatrix}.$$

Из материала § 10.7 мы знаем, что для каждого $\psi \in K[z]$ множество классов вычетов $\{\pi \bmod \psi: \pi \in K[z]\}$ образует циклический $K[z]$ -модуль $K[z]/K[z]\psi$. Отсюда следует, что

$$X_f \approx K[z]/K[z]\psi_1 \oplus \dots \oplus K[z]/K[z]\psi_q.$$

Но с учетом свойств делимости ψ_i (10.5.5) это в точности совпадает с утверждением структурной теоремы (8.1) для модуля с кручением X_f .

Полученный результат можно сразу обобщить на произвольные конечные $K[z]$ -модули с кручением. (Если кручения нет, то элементы матрицы W не являются рациональными дробями и замечание (10.1) бессодержательно.) Пусть X — такой модуль, порождающийся (как K -векторное пространство) многочленом g_1, \dots, g^m . Сопоставим обычным образом модулю X некоторую динамическую систему $\Sigma_X = (F, G, H)$, где

$$F: X \rightarrow X: x \mapsto z \cdot x,$$

$$(10.7) \quad G: K^m \rightarrow X: (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \sum_{k=1}^m \alpha_k g_k, \quad \alpha_k \in K,$$

$$H: X \rightarrow K^m: g_k \mapsto e_k.$$

Тогда система Σ_X полностью достижима и полностью наблюдаема. Поэтому Σ_X является канонической, а следовательно, согласно теореме (6.9), система Σ_X существенно эквивалентна отображению вход — выход $\omega \mapsto W \cdot \omega$, которое по теореме (9.4) эквивалентно матрице передаточных функций W_X системы Σ_X . Отметим еще раз, что теорема единственности канонических реализаций необходима для того, чтобы гарантировать независимость инвариантных свойств матрицы W_X от выбора конкретной системы Σ_X , представляющей модуль X , при условии, что Σ_X — каноническая система.

С нашей точки зрения, основной вывод можно сформулировать следующим образом.

(10.8) **Предложение.** Инварианты (определение (8.2)) конечного $K[z]$ -модуля с кручением X с аннулирующим многочленом ψ и

¹⁾ Напомним, что утверждение: « X есть конечный R -модуль или $R = K[z]$ » означает, что $\dim X$ (как размерность K -векторного пространства) конечна. См. следствие (8.5).

инварианты матрицы многочленов ψW_X , где W_X — передаточная матрица, соответствующая модулю X в смысле соотношений (10.7), одинаковы.

Короче говоря, зная ψ и W , для модуля X мы располагаем алгоритмом вычисления инвариантов модуля X . В этом и заложена одна из основных причин нашего интереса к передаточным функциям. Определение (10.7) показывает, что мы всегда можем поставить в соответствие модулю X матрицу W . Другой метод вычисления инвариантов с помощью полилинейных функций приводится у Бурбаки [Алгебра, гл. 7, § 4, п. 4].

Принимая во внимание утверждение (10.8), мы имеем теперь право (а на самом деле просто вынуждены) ввести еще одно определение инвариантов.

(10.9) **Определение.** Инварианты матрицы W правильных рациональных дробей над $K[z]$ задаются посредством ψ_i , построенных в (10.5.4).

(10.10) **Упражнение.** Пусть $W = \text{diag}(\theta_1/\sigma_1, \dots, \theta_m/\sigma_m)$. Тщательный расчет показывает, что при $(\theta_i, \sigma_i) = 1, i = 1, \dots, m$ имеет место соотношение

$$\dim W \stackrel{\Delta}{=} \dim X_{f_W} = \sum_{i=1}^q \deg \psi_i = \sum_{i=1}^m \deg \sigma_i,$$

даже несмотря на то, что в общем случае естественно $\psi_i \neq \sigma_i$.

Применим теперь этот аппарат к решению нескольких различных, но близких по духу задач.

а. Инварианты квадратных матриц. Нам нужно вычислить инварианты (в смысле определения (8.7)) матрицы размера $(n \times n)$ (или K -эндоморфизма) $F: X \rightarrow X$. Прежде всего поставим в соответствие матрице F динамическую систему $\Sigma_F = (F, I, I)$. Система Σ , очевидно, является канонической. В связи с этим соответствие Σ взаимно однозначно, и передаточная матрица этой системы имеет вид $W_F = (zI - F)^{-1}$. Но согласно теореме об инвариантах и представлению (10.2), мы имеем

$$(10a. 1) \quad zI - F = A(z) \Lambda(z) B(z),$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ни одно из λ_i не равно нулю, так как

$$\det(zI - F) = \chi(z),$$

и не равно нулю (как многочлен), так что $\text{rank}(zI - F) = n$.

Переходя к обратным матрицам, получаем, что

$$(10a. 2) \quad (zI - F)^{-1} = B^{-1}(z) \Lambda^{-1}(z) A^{-1}(z).$$

Но так как $\lambda_i | \lambda_n$, то λ_n должно быть общим знаменателем для $(zI - F)^{-1}$. Поскольку же

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \in K,$$

на самом деле λ_n должно быть *наименьшим* общим знаменателем. Поэтому в силу (10а.2) имеем

$$(10а.3) \quad \lambda_n(z) (zI - F)^{-1} = \hat{A}(z) \hat{\Lambda}(z) \hat{B}(z),$$

где $\hat{A} = B^{-1}$, $\hat{B} = A^{-1}$ и

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_n/\lambda_1, \lambda_n/\lambda_2, \dots, 1).$$

Если не считать обратного порядка элементов в выражении для $\hat{\Lambda}$, то приведенное выражение может служить представлением матрицы многочленов $\lambda_n(z) (zI - F)^{-1}$ как раз в смысле теоремы об инвариантных множителях. А так как λ_n — наименьший общий знаменатель для $(zI - F)^{-1}$, мы видим, что в соответствии с изложенной выше теорией $\lambda_n = \psi_F$.

На самом деле справедливо даже большее. Воспользовавшись утверждением (10.8) и обозначениями из (10.5.4), инварианты W_F можно вычислять как знаменатели $\hat{\lambda}_{n-i+1}/\psi_W$, остающиеся после сокращения общих множителей. Отсюда получаем

$$1/\psi_i = \hat{\lambda}_{n-i+1}/\psi_W = \hat{\lambda}_{n-i+1}/\lambda_n = 1/\lambda_{n-i+1},$$

что доказывает следующее предложение.

(10а.4) Предложение. *Инварианты матрицы $(zI - F)^{-1}$ в смысле определения (10.9) равны инвариантам матрицы $(zI - F)$ в смысле теоремы (А.17). Следовательно, инварианты квадратной матрицы F в смысле определения (8.7) можно вычислять как инварианты матрицы $(zI - F)$.*

Утверждение (10а.4) представляет собой классическое определение инвариантов матрицы (см. § 6 гл. 7 монографии Гантмахера [1953]).

Эта ситуация, по-видимому, впервые была отмечена и рассмотрена Калманом [1965а]. Аппарат этой статьи Калмана основан на элементарной алгебре многочленов и (в связи с этим) требует запутанных и тонких рассуждений. Мы же имели возможность убедиться в том, что аппарат теории модулей позволяет обойти все эти трудности.

В будущем нам понадобится еще и такое элементарное следствие.

(10а.5) Следствие. *Квадратная матрица F является циклической тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 1, \quad \lambda_n = \chi_F,$$

где λ_i — инварианты матрицы $(zI - F)$.

Заметим, что отсюда следует соотношение $\psi_F = \lambda_n = \chi_F$, совпадающее с критерием (7.23).

б. Вычисление канонических реализаций. Представление (10.3) дает нам всю необходимую информацию относительно системы Σ_w и позволяет едва ли не непосредственно получать каноническую реализацию этой системы. Впервые это было сделано в работах Калмана [1965b, 1966b]. Основную роль здесь играет следующая лемма.

(10b.1) **Лемма.** Пусть F — циклическая матрица размера $(n \times n)$ над K с характеристическим многочленом χ . Тогда

$$\chi(z)(zI - F)^{-1} = v(z)w'(z) \bmod \chi,$$

где:

- (а) компоненты (v_1, \dots, v_n) вектора v и компоненты (w_1, \dots, w_n) вектора w линейно независимы над K ;
- (б) если $\hat{v}\hat{w}' = v w' \bmod \chi$, то $\hat{v} = \varepsilon v$, а $\hat{w} = \varepsilon^{-1} w$, где ε есть единица в $K[z]/K[z]\chi$.

Доказательство. Существование этого представления является частным случаем теоремы об инвариантах. Действительно, согласно утверждениям (10a.4) и (10a.5), цикличность означает, что если

$$\chi W \text{ есть „числитель“ матрицы } (zI - F)^{-1},$$

то в представлении (10.3) имеем $L_w = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$. Поэтому, согласно (10.3), можно положить v равным первому столбцу матрицы P , а w' — первой строке матрицы Q .

Если $w'(z)a = 0$ (при всех z) для некоторого $a \in K^n$, то

$$\chi(z)(zI - F)^{-1}a = 0 \bmod \chi.$$

А так как $(zI - F^{-1})$ — правильная дробно-рациональная матрица это означает, что

$$\chi(z)(zI - F)^{-1}a = 0,$$

или, что то же,

$$(zI - F)^{-1}a = 0.$$

Но матрица $(zI - F)^{-1}$ не вырождена как дробно-рациональная матрица (даже несмотря на то, что в смысле «сравнения по модулю χ » ее ранг естественно равен 1), откуда следует, что $a = 0$. Точно так же из того, что $b'v(z) = 0$ (при всех z), следует, что $b = 0$. Этим доказан пункт (а) леммы (10b.1).

Выберем теперь $a \in K^n$ так, чтобы и $w'a$ и $\hat{w}'a$ были единицами в $K[z]/K[z]\chi$. (Существование такого a очевидно из-за того, что при любых $a \in K^n$ не может быть $(w'a, \chi) \neq 1$, поскольку эле-

менты w образуют базис для $\mathcal{P}^{\deg \chi}$. Но тогда $\hat{v}\hat{w}' = v w' \bmod \chi$ означает, что

$$\hat{v} = (\hat{w}'a)^{-1} (w'a) \cdot v,$$

что и доказывает утверждение (b) нашей леммы.

В общем случае явная форма v и w будет зависеть не только от выбора единицы в пункте (b) из (10b.1), но и от конкретного вида матрицы F .

(10b.2) **Пример.** Рассмотрим матрицу

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

которая является циклической, поскольку ее собственные числа различны. Характеристический многочлен этой матрицы есть $\chi_F(z) = z^2 - z$. Поэтому

$$\chi_F(z)(zI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 \\ z \end{bmatrix} [-z+1, z] \bmod \chi.$$

Заметим, что в этом случае элементы v и w оказываются делителями нуля по модулю χ .

(10b.3) **Пример** (Калман [1966b]). Если F — сопровождающая матрица вида (4.9) из гл. 2, то простой расчет показывает, что v и w можно выбрать в виде

$$v(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}, \quad w(z) = \begin{bmatrix} z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ z + \alpha_1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\chi_F(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n.$$

Требуемая линейная независимость над K компонент v и w очевидна.

Построим теперь явные формулы для канонических реализаций системы с передаточной матрицей W правильных рациональных дробей. Прежде всего вычислим представление (10.3) (или (10.2), если это окажется проще). Для каждого инварианта ψ_i матрицы W выберем такую циклическую матрицу F_i , чтобы было $\chi_{F_i} = \psi_i$. (Например, F_i может быть сопровождающей матрицей ψ_i .) Представим L в виде (l_1, \dots) и обозначим i -й столбец матрицы P через p_i , а i -ю строку матрицы Q из представления (10.3) —

через q'_i . Пусть v_i и w_i — векторные многочлены, свойства которых указаны в лемме. Рассмотрим систему уравнений

$$(10b.4) \quad H_i v_i = (l_i/\mu_i) p_i \bmod \psi_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$(10b.5) \quad w'_i G_i = q'_i \bmod \psi_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Учитывая сравнение по модулю ψ_i , векторные многочлены в правых частях этих уравнений можно выбирать так, чтобы степени их компонент были меньше чем $\deg \psi_i$. В этом предположении лемма показывает, что уравнения (10b.4) и (10b.5) имеют единственные решения H_i и G_i . Но тогда, вспоминая, что $\mu_i = (l_i, \psi)$, а $\psi_i = \psi/\mu_i$, положим, что

$$l_i p_i q'_i = \mu_i [(l_i/\mu_i) p_i q'_i] = \mu_i [H_i v_i w'_i G_i] \bmod \mu_i \psi_i.$$

Воспользовавшись леммой (10b.1) еще раз, найдем

$$l_i p_i q'_i = \mu_i [\psi_i H_i (zI - F_i)^{-1} G_i] \bmod \mu_i \psi_i = \psi [H_i (zI - F_i)^{-1} G_i] \bmod \psi.$$

Отсюда, согласно соотношению (10.3), имеем

$$\psi W = \sum_{i=1}^q l_i p_i q'_i \bmod \psi = \psi \sum_{i=1}^q H_i (zI - F_i)^{-1} G_i \bmod \psi.$$

Рассматривая правую часть этого равенства и помня, что каждый элемент матрицы W представляет собой *правильную* рациональную дробь, убедимся, что это равенство справедливо не только по модулю ψ_q , но и в обычном смысле. Отсюда получаем

$$(10b.6) \quad W(z) = \sum_{i=1}^q H_i (zI - F_i)^{-1} G_i.$$

Тем самым мы доказали искомый результат.

(10b.7) **Теорема о реализации.** Каждая передаточная матрица W правильных рациональных дробей может быть реализована в виде прямой суммы систем

$$\Sigma_i = (F_i, G_i, H_i),$$

где F_i есть циклическая матрица с характеристическим многочленом ψ_i , а G_i и H_i вычисляются по формулам (10b.4) и (10b.5), в которых используется представление (10b.1) для матрицы $(zI - F_i)^{-1}$.

(10b.8) **Упражнение.** Дайте строгое определение «прямой сумме» линейных систем в том смысле, в каком это выражение употребляется в сформулированной теореме.

(10b.9) **Следствие.** Реализация, определенная в теореме (10b.7), является канонической.

Доказательство. С учетом утверждения (6.10) нам достаточно показать, что предлагаемая реализация имеет ту же размерность, что и модуль X_{f_W} соответствующего отображения вход — выход f_W . Другими словами, нужно показать, что $\dim \Sigma_W = \dim X_W$. Но, согласно утверждениям (10.6) и (8.5), $\dim X_W = \deg \psi_1 + \dots + \deg \psi_q$. С другой стороны, очевидно, что $\dim \Sigma_i = \deg \psi_i$, так что размерность прямой суммы Σ_i совпадает с $\dim X_W$.

Примеры требуемых численных расчетов можно найти в работах Калмана [1965а, 1966а]. Приведем здесь всего лишь один пример.

(10b.10) **Пример.** Пусть

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z+3} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $\psi(z) = (z+1)(z+2)(z+3)$. Инварианты матрицы ψW имеют следующий вид:

$$\Lambda = \text{diag}(1, \psi, \psi),$$

а представление (10.3) выглядит следующим образом:

$$L = \text{diag}(1, 0, 0),$$

$$P = \begin{bmatrix} (z+2)(z+3) & 1 & 0 \\ 2(z+1)(z+3) & 2 & 2 \\ (z+1)(z+2) & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(z+2)(z+3) & -\frac{1}{2}(z+1)(z+3) & \frac{1}{2}(z+1)(z+2) \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы убедиться в том, что $RLQ = \psi W \bmod \psi$, придется заняться вычислениями следующего вида:

$$\begin{aligned} (z+2)^2(z+3)^2 &= (z+2)(z+3)(z+1+1)(z+1+2) = \\ &= 2(z+2)(z+3) \bmod (z+1)(z+2)(z+3). \end{aligned}$$

Если теперь выбрать v и w так же, как в примере (10b.3), то решение уравнения (10b.4) будет иметь вид

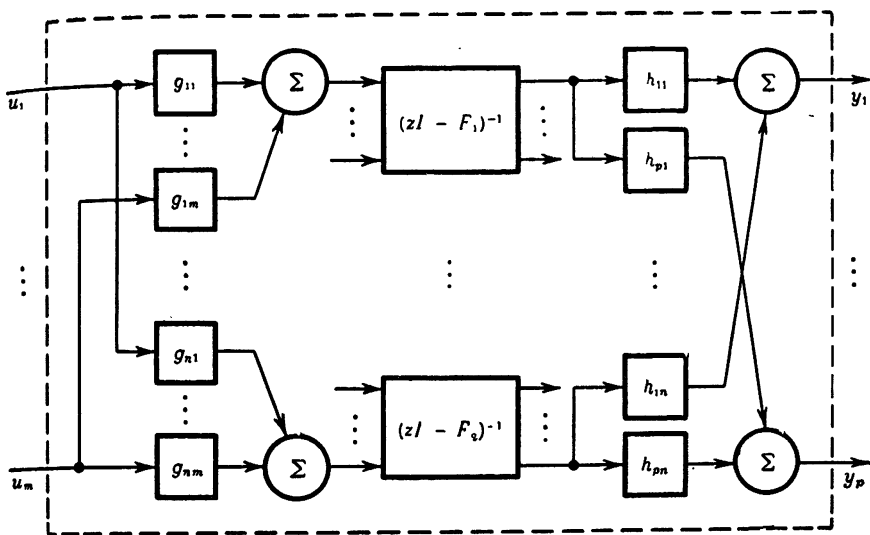
$$H = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы G оставляем читателю.

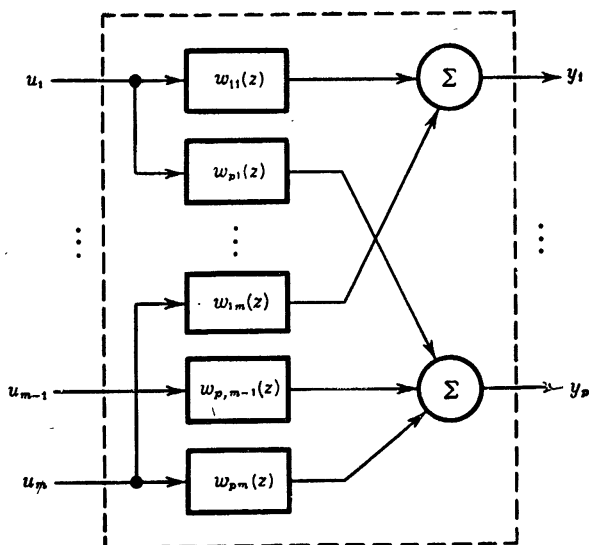
(10b.11) **Замечание.** Схема канонической реализации показана на рис. 10.2. Эта схема самым решительным образом отличается от той, которая обычно приводится в литературе и которая дана на рис. 10.3. Поскольку реализация скалярных передаточных функций представляет собой известную решенную задачу, на рис. 10.3, безусловно, показана одна из реализаций передаточной матрицы W . На самом деле эта схема получается сразу же из условий линейности. Однако эта реализация очень редко оказывается канонической. В связи с этим простота схемы на рис. 10.3 объясняется произвольностью ее выбора, и, несмотря на графическую привлекательность, эта схема может не иметь никакого отношения к реальной системе Σ с передаточной функцией W . Схема на рис. 10.2 кажется более подходящей в качестве модели реальной системы, поскольку в таких системах (вычислительные машины, мозг животного и т. д.) «обычно» проявляется внутренняя связность очень высокого уровня, отсутствующая на схеме рис. 10.3.

(10b.12) **Историческое замечание.** Изложенные результаты были впервые получены Калманом в работе [1965a]. Инварианты же ψ_i были вычислены значительно раньше Мак-Милланом [1952] с помощью представления (10.2) матричных многочленов и алгоритма, по существу совпадающего с алгоритмом (10.5). Однако в работе Мак-Миллана есть некоторые недостатки. Например, он не заметил, что по-настоящему содержательное представление имеет вид (10.3), а не (10.2). (Ненужные осложнения могут возникнуть в том случае, когда некоторые λ из представления (10.2) оказываются равными нулю по модулю ψ .) Систематическое использование сравнения по модулю ψ_i , характерное для работы Калмана [1965a], наводит на мысль о необходимости и возможности более тонкого алгебраического анализа. Именно это и привело к созданию теории, которой посвящена настоящая глава.

с. Описание эквивалентных канонических реализаций. Поскольку различные канонические реализации отличаются друг от друга лишь выбором базиса в X , класс эквивалентности всех канонических реализаций заданного отображения вход — выход f находится в взаимно однозначном соответствии с классом всех невырожденных матриц порядка, равного $\dim f$. (Это одно из следствий



Р и с. 10.2. Общая структура линейной системы.



Р и с. 10.3. Обычная реализация матричной передаточной функции.

теоремы (6.9)!) Используя лемму (10b.1), мы можем дать несколько более явное описание эквивалентных реализаций.

Рассмотрим скалярный случай $m = p = 1$. В этом случае $W_f = \theta/\psi$, где, конечно, предполагается, что $(\theta, \psi) = 1$. Выберем некоторую фиксированную циклическую матрицу F , у которой $\chi_F = \psi$ и соответствующие v и w удовлетворяют требованиям леммы (10b.1). Запишем $\theta = \varepsilon(\varepsilon^{-1}\theta)$, где ε — произвольная единица в $K[z]/K[z]\psi$. Тогда h и g канонической реализации (F, g, h') определяются следующими уравнениями:

$$(10c.1) \quad \varepsilon = h'v \bmod \psi,$$

$$(10c.2) \quad \varepsilon^{-1}\theta = w'g \bmod \psi$$

(см. уравнения (10b.4) и (10b.5)), поскольку условие $m = p = 1$ гарантирует цикличность. Но так как $(\theta, \psi) = 1$, то θ есть единица в $K[z]/K[z]\psi$. Кроме того, легко видеть, что $w'g$ и $h'v$ оказываются единицами каждый раз, когда (F, g) полностью достижимо, а (F, h') полностью наблюдаемо. Поэтому уравнения (10c.1) и (10c.2) справедливы для любых канонических реализаций. Вспоминая теперь, что F была выбрана произвольным образом, получаем еще одну «структурную» теорему.

(10c.3) Предложение. Пусть $m = p = 1$. Тогда класс всех канонических реализаций заданного отображения вход — выход f с минимальным многочленом ψ изоморфен множеству

$$\{\text{все циклические матрицы } F \text{ над } K \text{ с } \chi_F = \psi\} \times \{\text{все единицы в } K[z]/K[z]\psi\}.$$

Принимая во внимание теорему единственности канонических реализаций (6.9), мы видим, что второе из множеств в фигурных скобках должно быть изоморфно множеству всех изменений базиса, не изменяющих F , или, другими словами, множеству всех невырожденных матриц, коммутативных с F . На самом деле это классический результат (см. § 3.15 учебника Джекобсона [1953]):

(10c.4) Предложение. Квадратная матрица A над K коммутативна с циклической матрицей F над K тогда и только тогда, когда $A = \alpha(F)$, а $\alpha \in K[z]$. Более того, матрица A невырождена тогда и только тогда, когда α есть единица в $K[z]/K[z]\chi_F$.

Доказательство. Рассмотрим $K[z]$ -модуль X_F , индуцированный матрицей F (предложение (5.1)). Поскольку F циклическая, циклическим должен быть и модуль X_F (именно таким образом мы определили в (8.7) цикличность матрицы F). Если A коммутативна с F , то

$$A(z \cdot x) = (AFx) = (FAx) = z \cdot (Ax),$$

т. е. A является гомоморфизмом модуля. Пусть g — некоторая образующая модуля X_F , и пусть $A: g \mapsto \alpha \cdot g = \alpha(F)g$. Но так как X_F циклично, то A полностью определяется посредством α .

Более того, если $(\alpha, \chi) \neq 1$ (т. е. если α не есть единица в $K[z]/K[z]\chi$), то существует такое δ , что $\delta\alpha = \beta\chi$ и, следовательно,

$$\delta(F)\alpha(F) = (\beta\chi)(F) = 0,$$

а матрица A вырождена. Поэтому A невырождена тогда и только тогда, когда α есть единица.

Обобщение предложения (10с.3) на случай q циклических подсистем предоставляем читателю. Результат для этого случая, аналогичный предложению (10с.4), был получен со всеми подробностями Джекобсоном [1953, § 3.16—3.18].

d. Степень дробно-рациональной матрицы. Пользуясь грубой аналогией с определением степени многочленной матрицы, Мак-Миллан [1952] определил степень правильной дробно-рациональной матрицы следующим образом:

$$(10d.1) \quad \deg W = \sum_{i=1}^q \deg \psi_i,$$

где $\deg W$, очевидно, совпадает с нашим определением $\dim W = \dim X_{f_W}$ (см. утверждение (8.5)). Даффин и Хазони [1963] исследовали некоторые свойства $\dim(\cdot)$, пользуясь специально разработанными для этого методами. Сравнение различных определений, предложенных ими вместо определения (10d.1), приведено в работе Калмана [1965a]. Как было показано в этой работе, все результаты, относящиеся к степеням матриц, являющиеся простыми следствиями интуитивно очевидных (и легко доказываемых) свойств реализаций. Приведем несколько таких результатов на выбор.

(10d.2) **Предложение.** Если V — подматрица матрицы W , то $\deg V \leq \deg W$.

Доказательство. Если Σ — минимальная реализация матрицы W , то Σ будет также и реализацией подматрицы V после отбрасывания лишних входов и выходов. Но так как такое Σ может быть неминимальной реализацией подматрицы V , то нужно допустить и знак неравенства.

(10d.3) **Предложение.** $\deg W\hat{W} \leq \deg W + \deg \hat{W}$.

Доказательство. Если Σ и $\hat{\Sigma}$ — минимальные реализации матриц W и \hat{W} соответственно, то последовательное соединение Σ и $\hat{\Sigma}$ реализует $W\hat{W}$, но эта реализация, возможно, неминимальна.

е. Неискажающие и воспроизводящие системы¹⁾. В заключение этого параграфа рассмотрим задачу, при решении которой понадобится представление (10.2), а не (10.3) для ψW .

Нам потребуются следующие специальные определения (не используемые дальше). Линейная система называется *неискажающей* тогда и только тогда, когда при произвольном заданном начальном состоянии $x(\tau)$ и выходной последовательности $y(\tau), \dots, y(\tau + l)$ (при этом, естественно, считается, что F_Σ, G_Σ и H_Σ известны) можно однозначно определить входную последовательность $u(\tau), \dots, u(\tau + l - d)$. (Здесь $d \geq 1$ есть подходящее запаздывание, позволяющее вычислять выходную последовательность.) Точно так же система Σ называется *воспроизводящей* тогда и только тогда, когда для любых $x(\tau)$ и всех требуемых выходных последовательностей $y(\tau), \dots, y(\tau + l - d)$ существует входная последовательность $u(\tau), \dots, u(\tau + l)$, формирующая эту выходную последовательность. Ниже станет ясно, что свойства неискажаемости и воспроизводимости взаимно дополняют друг друга. Мы рассмотрим лишь первое из них. Наша задача состоит в том, чтобы не только выяснить, является ли заданная система Σ неискажающей или искажающей, но и в том, чтобы найти систему $\Sigma^\#$, формирующую требуемую входную последовательность по заданной выходной последовательности. Грубо говоря, нам нужно найти систему $\Sigma^\#$, обратную системе Σ .

Поскольку системы линейны, мы можем (и будем) предполагать, что $x(\tau) = 0$.

Скалярный случай: $m = p = 1$. Если нас интересует входная последовательность с точностью до сравнения по модулю ψ , то эта задача, по сути дела, сводится к задаче определения состояния и может быть решена методом, описанным в § 2.6. Если же нас интересует *вся* входная последовательность, то придется решать уравнение

$$(10e.1) \quad W\omega = (\theta/\psi)\omega = \gamma.$$

Искомое решение получается сразу из того, что $(\theta, \psi) = 1$ тогда и только тогда, когда система Σ каноническая; $\psi\gamma$ должно быть многочленом, делящимся на θ , а частное должно равняться ω .

Общий случай. Если ранг матрицы W меньше m (над полем рациональных дробей $K[z]$ переменной z), то найдется такой ненулевой вектор $\omega \in K^m[z]$, что $W\omega = 0$. Поэтому необходимо, чтобы $\text{rang } \psi W = m$ и чтобы $p \geq m$. Согласно теореме об инвариантах, имеем $\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, m$, и, следовательно, эти условия также и достаточны. Действительно, рассмотрим представление (10.2) и

¹⁾ Результаты этого раздела принадлежат в основном д-ру П. Л. Фэрру.

положим $\hat{\gamma} = A^{-1}\gamma$, а $\hat{\omega} = B\omega$. (Вспомните алгоритм (10.5), но не забывайте, что все операции теперь выполняются в $K[z]$, а не в $K[z]/K[z]\psi$.) Тогда необходимо иметь

$$(10e.2) \quad \begin{aligned} \lambda_i \hat{\omega}_i &= \psi \hat{\gamma}_i, & i &= 1, \dots, m; \\ 0 &= \hat{\gamma}_i, & i &= m+1, \dots, p. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений решается, как и в скалярном случае, а следовательно, ω известно, так как $\det B$ есть единица в $K[z]$. Второе уравнение, известное в теории кодирования как «проверка на четность», может использоваться для исправления ошибок некоторого типа в предполагаемых значениях γ .

Поскольку $\text{rank } W = m$, имеется невырожденная подматрица W_1 размера $(m \times n)$, полученная вычеркиванием подходящих строк матрицы W , соответствующих выходам, не использованным для определения ω . Матрица W_1^{-1} дробно-рациональна, но (обычно) она не является правильной и поэтому не может быть представлением динамической системы. Но если разрешить запаздывание d на декодирование входной последовательности по выходной, то матрица $z^{-d}W_1^{-1}$ окажется правильной дробно-рациональной и представляющей искомую систему $\Sigma^\#$. (Для минимизации запаздывания d необходимо рассмотреть все матрицы C размера $(m \times p)$ над K , такие, что ранг CW равен m . Тогда d_{\min} зависит от C , но явный вид этой зависимости пока неизвестен. Трудность этой задачи состоит в том, что максимальные степени элементов матриц A и B совершенно произвольны и, более того, эти матрицы, естественно, не определяются однозначно видом ψW .)

Поскольку $q \leq r = \text{rank } \psi W = m$ и строгий знак неравенства вполне возможен (как, например, в (10b.10)), ясно, что рассмотренные здесь вопросы имеют очень мало общего с внутренней структурой системы Σ , но зависят лишь от преобразующих свойств этой системы.

10.11 Алгоритм Б. Л. Хо

Решение задачи реализации с помощью теоремы об инвариантах из § 10.10b позволяет получить всю необходимую информацию о структуре канонической реализации. К сожалению, этот метод требует очень сложных и утомительных расчетов, что неразрывно связано с характером классического алгоритма определения инвариантов.

Предположим, однако, что нам *не нужно знать* инвариантов и что нас интересуют лишь три матрицы F , G и H реализации. Тогда разумно поискать более простой алгоритм. Эта задача впервые была решена Б. Л. Хо весной 1965 г. (Хо [1966]; Хо и Калман [1965, 1966] и независимо Юлой и Тиши [1966]. Последующие

исследования показали, что этот алгоритм, совершенно неизвестный в теории систем до 1965 г., играет центральную роль. Этот алгоритм базируется на теореме об инвариантах над K (а не над $K[z]$, как в § 10.10). Вследствие этого результат данного параграфа приложим не только в случае произвольного поля K , но и в случае весьма общих колец. В этой области осталось еще много нерешенных (и, возможно, плодотворных) задач.

Принятый здесь метод изложения основывается на работах Хонга и Калмана [1965, 1966, 1969], а также Зейгера [1967b].

Рассмотрим линейную систему, заданную своим отображением вход — выход f . Из-за линейности системы знание f эквивалентно информации о бесконечной последовательности

$$(f(e_k)(1), f(e_k)(2), \dots), \quad k = 1, \dots, m,$$

где $f(e_k)(i) \in K^p$. Мы можем также сопоставить отображению f некоторую бесконечную последовательность $\{A_1, A_2, \dots\}$ матриц размера $(p \times m)$ над K , где каждая матрица определяется соотношением

$$(11.1) \quad A_i: K^m \rightarrow K^p, \\ : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \sum_{k=1}^m \alpha_k f(e_k)(i), \quad \alpha_k \in K, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поэтому f также эквивалентно бесконечной в двух направлениях блочной матрице

$$(11.2) \quad \mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots \\ A_2 & A_3 & A_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

которую мы назовем *ганкелевой матрицей* отображения f . (Матрицу, элемент которой с индексами (i, j) задается значением некоторой функции в точке $(\cdot)_{i+j}$, часто называют ганкелевой.) Заметим, что, хотя матрица $\mathcal{H}(f)$ и «блочнo-симметрична», она не обязательно симметрична в обычном смысле слова. Нас будут интересовать в основном только блочные подматрицы размера $N' \times N$, занимающие верхний левый угол матрицы $\mathcal{H}(f)$, т. е.

$$(11.3) \quad \mathcal{H}_{N'N}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_N \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N'} & \dots & A_{N'+N-1} \end{bmatrix}.$$

Операторы сдвига, определенные на Ω и Γ , индуцируют на $\mathcal{H}(f)$ свой оператор сдвига, определяемый следующим уравнением:

$$(11.4) \quad \sigma^k \mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(\sigma^k f) = \begin{bmatrix} A_{1+k} & A_{2+k} & \dots \\ A_{2+k} & A_{3+k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\sigma^k f: \omega \mapsto f(z^k \cdot \psi) = z^k \cdot f(\omega)$$

(последнее равенство вытекает из коммутативности диаграммы (2.1c)).

Короче говоря, ганкелеву матрицу $\mathcal{H}(f)$ можно рассматривать как математический объект, эквивалентный отображению f , который можно использовать вместо f в качестве «исходного материала» для различных расчетов. Например, оператор сдвига σ можно представить как отображение $\mathcal{H}(f) \rightarrow \mathcal{H}(zf)$, задаваемое в явной форме, поскольку $\mathcal{H}(zf)$ является блочной матрицей матрицы $\mathcal{H}(f)$. Различные другие применения $\mathcal{H}(f)$ можно найти в работе Хо и Калмана [1969].

Опишем теперь алгоритм Б. Л. Хо. Он позволяет получить явные выражения для матриц (F, G, H) канонической реализации. Объем необходимых вычислений определяется объемом расчетов, нужных для определения инвариантов K -матрицы $\mathcal{H}_{N+1, N}(f)$, где N не превосходит $\dim f$. Мы приведем два доказательства этого алгоритма. Первое из них использует обычную линейную алгебру, но довольно сложным образом. Второе, принадлежащее Зейгеру, требует лишь манипуляций с коммутативными диаграммами того же типа, что и в § 10.6. Второе доказательство особенно ярко показывает, как можно было бы вывести этот алгоритм из абстрактной теории реализации в духе § 10.6. Однако нужно признать, что оригинальное открытие Б. Л. Хо основывалось на соображениях, весьма близких к используемым в первом доказательстве.

Рассматриваемый алгоритм опирается на три следующие леммы.

(11.5) **Лемма.** Пусть для f существует некоторая конечномерная реализация. Тогда индуцированная последовательность (A_1, A_2, \dots) для f (см. 11.1) удовлетворяет соотношению

$$A_{r+j+1} = - \sum_{i=1}^r \beta_i A_{i+j}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

справедливому для некоторых $\beta_1, \dots, \beta_r \in K$, где r можно выбрать не меньше, чем $\deg \psi_f$.

Доказательство. Определение отображения вход — выход f и уравнения (1.5) сразу показывают, что матрицы (F, G, H) реализуют

f тогда и только тогда, когда

$$(11.6) \quad A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть θ — любой аннулирующий многочлен $K[z]$ -модуля X_f , индуцированного отображением f . (В частности, можно положить $\theta = \psi_f$.) Если

$$-\theta_f(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

то, полагая $\beta_i = \alpha_{n-i+1}$, мы с помощью теоремы Кэли — Гамильтона (или теории модулей) получим требуемое соотношение. (Нам не требуется знать, что если $r < \deg \psi_f$, то приведенное соотношение не выполняется. Доказательство этого факта предоставляем читателю в качестве легкого упражнения, связанного с теорией достижимости и наблюдаемости.)

В последующем нам не потребуется вычислять β_i . Достаточно убедиться лишь в факте их *существования*. В действительности же одну реализацию можно получить непосредственно из леммы (11.5). Для этого потребуются следующие специфические обозначения:

$$E_n^m = \begin{cases} \text{матрица размера } (m \times n) \text{ вида } \begin{bmatrix} I_m^m & 0_{n-m}^n \end{bmatrix}, & \text{если } m < n, \\ \text{матрица размера } (m \times n) \text{ вида } \begin{bmatrix} I_n^n \\ 0_{n-m}^{m-n} \end{bmatrix}, & \text{если } m > n, \\ \text{единичная матрица размера } (m \times m) \text{ вида } [I_m^m], & \text{если } m = n, \end{cases}$$

где I_n^m и 0_n^m — соответственно единичная и нулевая матрицы размера $(m \times n)$.

(11.7) **Лемма.** Если для f существует некоторая конечномерная реализация, то это отображение реализуется тройкой (F, H, G) , где

$$(11.8) \quad H = E_{pr}^p,$$

$$(11.9) \quad G = \mathcal{H}_{rr}(f) E_m^{mr},$$

$$(11.10) \quad F = C = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & I_p & & 0_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_p & 0_p & 0_p & & I_p \\ -\beta_1 I_p & -\beta_2 I_p & -\beta_3 I_p & & -\beta_r I_p \end{bmatrix}.$$

Здесь r и β_1, \dots, β_r такие же, как в лемме (11.5), а I_p и 0_p — соответственно тождественная и нулевая матрицы размера $(p \times p)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, согласно лемме (11.5), имеем

$$(\sigma^i \mathcal{H})_{rr}(f) = C^i \mathcal{H}_{rr}(f) \quad \text{для всех } i = 0, 1, 2, \dots$$

(Это показывает важность представления системы ее ганкелевой матрицей. В этом случае оператор сдвига автоматически представляется через матрицу F реализации. Отметим еще тесную связь между оператором сдвига и «блочной сопровождающей матрицей» C .)

Ясно, что

$$A_1 = E_{pr}^p \mathcal{H}_{rr}(f) E_m^{mr} = HG$$

и что для любых $i = 1, 2, \dots$ справедливо, что

$$\begin{aligned} A_i &= E_{pr}^p [\sigma^{i-1} \mathcal{H}_{rr}(f)] E_m^{mr} = \\ (11.11) \quad &= E_{pr}^p [C^{i-1} \mathcal{H}_{rr}(f)] E_m^{mr} = \\ &= HC^{i-1}G, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы (11.6). Следовательно, матрицы (11.8)—(11.10) реализуют отображение f .

Остается сделать еще одно принципиально важное замечание.

(11.12) **Лемма.** Пусть для f существует некоторая конечномерная реализация Σ . Тогда при любых положительных целых N и N' имеет место соотношение

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) \leq \dim f \leq \dim \Sigma.$$

Доказательство. Пусть $\Sigma = (F, G, H)$ есть произвольная реализация отображения f . Определим

$$\mathcal{R}_N = [G, FG, \dots, F^{N-1}G]$$

и

$$\mathcal{O}_{N'} = [H', F'H', \dots, (F')^{N'-1}H'].$$

Тогда, согласно лемме (11.6), справедливо равенство

$$\mathcal{H}_{N'N} = \mathcal{O}_{N'}' \mathcal{R}_N$$

для любых реализаций и любых положительных N и N' . Предположим теперь, что реализация Σ каноническая. Тогда

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) \leq \min \{\text{rank } \mathcal{R}_N, \text{rank } \mathcal{O}_{N'}\} \leq \dim f.$$

(Во втором неравенстве знак \leq можно заменить равенством, если, по крайней мере, $N, N' \geq \deg \psi_f$.)

(11.13) **Замечание.** Приведенное доказательство становится яснее и интереснее, если вспомнить, что матрица \mathcal{R}_N играет ключевую

роль в получении условий полной достижимости (теорема (3.18), гл. 2). В соответствии с принципом дуальности матрица \mathcal{O}_N играет аналогичную роль в теории наблюдаемости.

Теперь мы готовы описать искомый алгоритм.

(11.14) **Реализация алгоритма Б. Л. Хо.** Построение канонической реализации произвольного конечномерного отображения $\text{вход} \rightarrow \text{выход}$ f можно осуществить следующими шагами:

1. Выбираем r , удовлетворяющее ограничению леммы (11.5).
2. С помощью алгоритма определения инвариантов над полем K (или любым другим¹⁾ эквивалентным методом) находим невырожденные матрицы P размера $(pr \times pr)$ и M размера $(mr \times mr)$ над K , такие, что

$$(11.15) \quad P[\mathcal{H}_{rr}(f)]M = \begin{bmatrix} I_n^n & 0_{mr-n}^n \\ 0_{n}^{pr-n} & 0_{mr-n}^{pr-n} \end{bmatrix} = E_n^{pr} E_{mr}^n.$$

3. Вычисляем матрицы канонической реализации отображения f по следующим формулам:

$$(11.16) \quad F = E_{pr}^n P[(\sigma\mathcal{H})_{rr}(f)]ME_n^{mr},$$

$$(11.17) \quad G = E_{pr}^n P[\mathcal{H}_{rr}(f)]E_n^{mr},$$

$$(11.18) \quad H = E_{pr}^p [\mathcal{H}_{rr}(f)]ME_n^{mr}.$$

Квадратные скобки в этих формулах должны подчеркивать, что в качестве основной информации всегда выступает матрица $\mathcal{H}_{rr}(f)$ или результат ее сдвига, а данные, используемые для расчетов, содержатся в матрицах P и M . Матрица E соответствует операции «редактирования», а не вычислительной операции.

Первое доказательство (Б. Л. Хо). Размерность системы $\Sigma = (F, G, H)$, построенной согласно формулам (11.16)–(11.18), очевидно, равна рангу матрицы $\mathcal{H}_{rr}(f)$. Согласно лемме (11.12) заключаем, что если тройка (F, G, H) определяет реализацию отображения f , то эта реализация каноническая. Поэтому остается показать, что матрицы, вычисленные по формулам (11.16)–(11.18), удовлетворяют условиям леммы (11.6).

Для простоты будем писать \mathcal{H} вместо $\mathcal{H}_{rr}(f)$ и $\sigma^k \mathcal{H}$ вместо $(\sigma^k \mathcal{H})_{rr}(f)$ и опустим некоторые несущественные индексы при E^2).

Матрица

$$\mathcal{H}^\# = ME_n^n P$$

¹⁾ Изящное описание «обычного» алгоритма можно найти в работе Андре [1949].

²⁾ Читатель должен, конечно, проверить, определены ли все матричные произведения, встречающиеся ниже.

называется *псевдообратной* матрицей \mathcal{H} в том смысле, что $\mathcal{H}\mathcal{H}^\# \mathcal{H} = \mathcal{H}$. С помощью $\mathcal{H}^\#$ мы просто проверим, определяют ли формулы (11.16)–(11.18) некоторую реализацию или нет. Это делается в несколько этапов:

$$\begin{aligned}
 A_i &= E^p [\sigma^{i-1} \mathcal{H}] E_m = && \text{(по определению } \sigma), \\
 &= E^p C^{i-1} \mathcal{H} E_m = && \text{(согласно (11.14))}, \\
 &= E^p C^{i-1} \mathcal{H} \mathcal{H}^\# \mathcal{H} E_m = && \text{(по определению операции } \#), \\
 &= E^p C^{i-1} \mathcal{H} M E_n E^n P \mathcal{H} E_m = && \text{(по определению } \mathcal{H}^\#), \\
 &= E^p C^{i-1} \mathcal{H} M E_n G = && \text{(по определению } G), \\
 &= E^p \mathcal{H} D^{i-1} M E_n G = && \text{(где } D \text{ есть результат блочного} \\
 &&& \text{транспонирования матрицы } C \\
 &&& \text{и } C\mathcal{H} = \mathcal{H}D)
 \end{aligned}$$

$$(11.19) \quad D = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & \dots & -\beta_1 I_m \\ I_m & 0_m & 0_m & \dots & -\beta_2 I_m \\ 0_m & I_m & 0_m & \dots & -\beta_3 I_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & -\beta_r I_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 &= E^p \mathcal{H} \mathcal{H}^\# \mathcal{H} D^{i-1} M E_n G = && \text{(по определению } \#), \\
 &= E^p \mathcal{H} M E_n E^n P \mathcal{H} D^{i-1} M E_n G = && \text{(по определению } \mathcal{H}^\#), \\
 &= H E^n P \mathcal{H} D^{i-1} M E_n G = && \text{(по определению } H), \\
 &= H E^n P C^{i-1} \mathcal{H} M E_n G && \text{(в силу равенства } \mathcal{H}D = C\mathcal{H}).
 \end{aligned}$$

Остается только проверить, что

$$(11.20) \quad E^n P C^{i-1} \mathcal{H} M E_n = (E^n P C \mathcal{H} M E_n)^{i-1} = F^{i-1}.$$

Для случая $i = 3$ имеем:

$$\begin{aligned}
 F^2 &= E^n P C \mathcal{H} M E_n E^n P C \mathcal{H} M E_n = && \text{(по определению } F), \\
 &= E^n P C \mathcal{H} \mathcal{H}^\# C \mathcal{H} M E_n = && \text{(по определению } \mathcal{H}^\#), \\
 &= E^n P C \mathcal{H} \mathcal{H}^\# \mathcal{H} D M E_n = && \text{(согласно } C\mathcal{H} = \mathcal{H}D), \\
 &= E^n P C \mathcal{H} D M E_n = && \text{(по определению } \#), \\
 &= E^n P C^2 \mathcal{H} M E_n && \text{(согласно } \mathcal{H}D = C\mathcal{H}).
 \end{aligned}$$

В общем случае утверждение (11.20) доказывается точно так же с помощью индукции по i .

(11.21) **Замечание.** Основное ограничение алгоритма Б. Л. Хо состоит в том, что все в нем зависит от справедливости следующего абстрактного утверждения:

для f существует некоторая конечномерная реализация.

Согласно лемме (11.12), мы можем сформулировать более ясное эквивалентное утверждение:

(11.22) *Существует целое n , такое, что $\text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) \leq n$ для любых положительных целых N и N' .*

И, конечно, справедливость даже такого утверждения невозможно выяснить эмпирическим путем, так как для этого пришлось бы перепробовать бесконечное множество значений N и N' . Эту трудность можно в некотором смысле обойти следующим образом. С помощью более тонкого доказательства алгоритма (11.14) мы покажем (см. также работы Хо и Калмана [1965, 1966, 1969], что условие

$$(11.23) \quad \text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) = \text{rank } \mathcal{H}_{N'+1, N}(f) = \text{rank } \mathcal{H}_{N', N+1}(f)$$

гарантирует, что система Σ с матрицами, вычисленными по формулам (11.16) — (11.18), удовлетворяет условиям леммы (11.6) при $i = 1, \dots, N + N'$. Более того, пользуясь соотношениями (11.23), мы покажем, что Σ в этом случае является некоторой подсистемой канонической реализации отображения f (последнее может быть даже бесконечномерным). Второе доказательство алгоритма (11.14) должно как раз и внести ясность в эти вопросы.

Второе доказательство (Зейгера — Калмана)¹⁾. Идея этого доказательства состоит в том, чтобы непосредственно вычислить каноническую реализацию отображения f с помощью следующих основных фактов:

- 1) f стационарно;
- 2) f имеет конечный ранг (обладает конечномерной факторизацией);
- 3) каноническая факторизация отображения f расщепляет f на сюръективное и биективное отображения.

И хотя это доказательство довольно длинно, оно, безусловно, очень просто.

Шаг 1. Конечность. Предположим, что f факторизуется следующим образом:

$$\Omega \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} \Gamma,$$

где $X = K^n$. Пусть Ω_k есть K -векторное пространство, образованное k последними членами последовательностей из Ω , т. е. всевозможными многочленами $(k-1)$ -й степени из $K^m[z]$. Аналогично пусть Γ_k будет K -векторным пространством, образованным первыми k

¹⁾ Более раннее доказательство можно найти в работе Зейгера [1967b], но в нем есть серьезные недостатки.

членами последовательностей из Γ . Тогда у нас есть тривиальное вложение $\Omega_k \rightarrow \Omega$ (многочлены из Ω_k можно рассматривать как многочлены из Ω) и тривиальная проекция $\Gamma \rightarrow \Gamma_k$ (ограничивающаяся k первыми компонентами векторов из Γ). Пусть

$$X_k = R[g_k: \Omega_k \rightarrow \Omega \rightarrow X]$$

и

$$X'_k = \ker(h_k: X \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma_k).$$

Это позволяет построить возрастающую и убывающую цепочки подпространств пространства X :

$$(11.24) \quad \{0\} \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X,$$

и

$$(11.25) \quad X \supseteq X'_1 \supseteq X'_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}.$$

Поскольку K -векторное пространство X конечномерно, существует такое положительное целое N , что $X_N = X_k$ при всех $k \geq N$. Точно так же существует такое положительное целое N' , что $X'_{N'} = X'_k$ при всех $k \geq N'$. Если отображение $\Omega \rightarrow X$ является сюръективным, то $X_N = X$, и если $X \rightarrow \Gamma$ биективно, то $X_{N'} = \{0\}$.

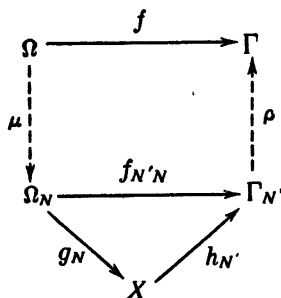
Легко видеть, что f индуцирует отображение

$$f_{N'N}: \Omega_N \rightarrow \Gamma_{N'}.$$

матричное представление которого имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_{N'N}(f) = \mathcal{H}(f_{N'N}).$$

Нам хочется заменить задачу канонической факторизации отображения f задачей канонической факторизации матрицы $\mathcal{H}_{N'N}(f)$. В этом и состоит второй шаг алгоритма (11.14). Таким образом, нам надо найти K -линейные отображения, соответствующие штриховым стрелкам в следующей коммутативной диаграмме K -линейных отображений:



Рассмотрим векторные многочлены

$$e_k z^j, \quad k = 1, \dots, m \quad \text{и} \quad j = 0, 1, \dots,$$

из Ω , где $e_k = (\delta_{ik}) \in K^m$ (см. предложение 3.5). Они образуют базис для Ω , рассматриваемого как свободный K -модуль. Поскольку отображение $g_N: \Omega_N \rightarrow X$ является сюръективным, каждый класс эквивалентности $[e_k z^j]_f$ содержит некоторый элемент \tilde{w}_{jk} из Ω_N . Пусть $\mu: e_k z^j \mapsto \tilde{w}_{jk}$, и продолжим μ на Ω , сохраняя линейность. Для того чтобы построить ρ , заметим, что $h: X \rightarrow \Gamma$ и $h_N: X \rightarrow \Gamma_N$ являются взаимно однозначными. Пусть тогда

$$\rho: \gamma' \mapsto \gamma = (h \circ h_N^{-1})(\gamma')$$

каждый раз, когда $\gamma' \in R[h_N] \subset \Gamma_N$. Поскольку Γ_N есть K -векторное пространство, $R[h_N]$ является одним из слагаемых представления Γ_N в виде прямой суммы, и ясно, что ρ можно линейно продолжить на Γ_N . Обратите внимание на то, что, рассматривая «входную» и «выходную» части диаграммы, мы пользуемся строго дуальными рассуждениями. (Упражнение (Зейгер): покажите, что $X_r = X_{r+1}$ означает, что $X_r = X_k$ при всех $k \geq r$ и что справедливо аналогичное утверждение для X'_k .)

Так как $N, N' \leq r$, эти числа можно рассматривать как более точные оценки, необходимые для численных расчетов, чем те, которые получаются в результате умножения размеров блочных матриц матрицы $\mathcal{H}(f)$ на r .

Шаг 2. Каноническая факторизация отображения $f_{N'N}$. Так же как и в первом доказательстве, теорема об инвариантах над K^1) показывает, что каноническая факторизация матричного представления отображения $f_{N'N}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_{N'N}(f) = A\Lambda B,$$

где

$$A = pN' \times pN' \quad (\text{невыврождена}),$$

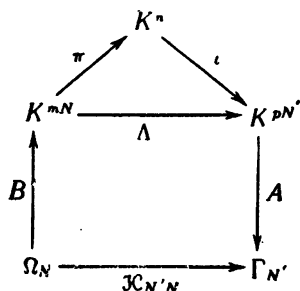
$$B = mN \times mN \quad (\text{невыврождена}),$$

$$\Lambda = E_n^{pN'} E_{mN}^n.$$

Задача сведена, таким образом, к тривиальной: к задаче факторизации матрицы Λ .

1) Теорема об инвариантной факторизации над полем очень проста, поскольку теперь все λ_i являются единицами. На самом деле A, B и Λ можно вычислить с помощью обычного алгоритма определения ранга (Андрэ [1949]).

Следующая коммутативная диаграмма K -линейных отображений подводит итог всем этим результатам:



В этой диаграмме при всех $k_i \in K$ отображения

$$\pi: K^{mN} \rightarrow K^n: (k_1, \dots, k_{mN}) \mapsto (k_1, \dots, k_n)$$

являются естественными проекциями (сохраняющими n первых координат и отбрасывающими остальные), а отображения

$$\iota: K^n \rightarrow K^{pN'}: (k_1, \dots, k_n) \mapsto (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)$$

являются естественными вложениями (получающимися с помощью приписывания нужного числа нулей).

Шаг 3. Определение G и H . Пусть $\iota: K^m \rightarrow \Omega_N$ — естественное вложение $k \mapsto$ (многочен $\theta = k$ степени 0). Тогда G имеет вид отображения

$$K^m \xrightarrow{\iota} \Omega_N \xrightarrow{B} K^{mN} \xrightarrow{\pi} K^n.$$

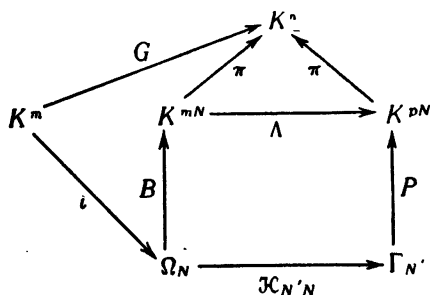
(И хотя мы еще не доказали, что G составляет часть реализации, ясно, что такое определение естественно, так как G отображает одношаговое входное воздействие в соответствующее состояние.)

Аналогично, H есть отображение

$$K^n \xrightarrow{\iota} K^{pN'} \xrightarrow{A} \Gamma_{N'} \xrightarrow{\pi} K^p,$$

где π отображает степенной ряд в его первый член.

Выражения, приведенные выше для G и H , не согласуются с формулами (11.17) и (11.18), так как в уравнении (11.15) имеем $P = A^{-1}$ и $M = B^{-1}$. Для того чтобы получить формулу Б. Л. Хо для G , заметим, что на основании коммутативности нашей исходной диаграммы можно доказать коммутативность и следующей:



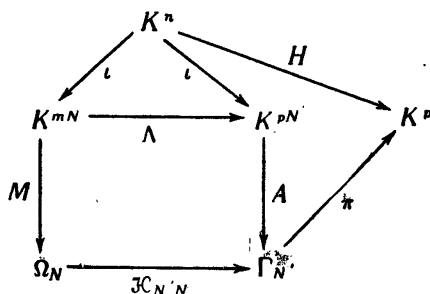
А тогда имеем

$$G = \pi \circ P \circ \mathcal{H}_{N'N} \circ \iota,$$

что эквивалентно с точностью до обозначений соотношению

$$(11.17^*) \quad G = E_{pN'}^n P \mathcal{H}_{N'N} E_m^{mN}.$$

Для того чтобы вычислить H , рассмотрим еще одну коммутативную диаграмму:



Согласно этой диаграмме, имеем

$$H = \pi \circ \mathcal{H}_{N'N} \circ M \circ \iota,$$

или эквивалентно

$$(11.18^*) \quad H = E_{pN'}^p \mathcal{H}_{N'N} M E_m^{mN}.$$

Шаг 4. Определение F. Теперь нам нужно учесть предположение о стационарности отображения f . В качестве частного случая коммутативной диаграммы (2.1с) мы можем построить коммутативную диаграмму

$$(11.26) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_N & \xrightarrow{f_{N'+1,N}} & \Gamma_{N'+1} \\ \sigma_N \downarrow & \searrow (\sigma f)_{N'N} & \downarrow \sigma_{\Gamma} \\ \Omega_{N+1} & \xrightarrow{f_{N'N+1}} & \Gamma_{N'} \end{array}$$

Существование диагонального отображения очевидно из определения оператора сдвига. Пользуясь тем же построением, что и на шаге 1, мы с помощью факторизации приведем эту диаграмму к виду

$$(11.27) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_N & \xrightarrow{f_{N'N}} & \Gamma_{N'} \\ \sigma_N \downarrow & \searrow (of)_{N'N} & \downarrow \rho_{N'} \\ \Omega_{N+1} & & \Gamma_{N'+1} \\ \mu_N \downarrow & & \downarrow \sigma_{\Gamma} \\ \Omega_N & \xrightarrow{f_{N'N}} & \Gamma_{N'} \end{array}$$

а затем «приклеим» диаграмму предыдущего типа к верхнему и нижнему краям диаграммы. Очевидно, что эта операция не нарушает коммутативности. (Заметим, что эта диаграмма абстрактным образом выражает стационарность отображения f , которая сказывается на матрице $\mathcal{H}(f)$ в том, что обеспечивает специфический ганкелевский характер блочных матриц.) В результате такого склеивания получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & & \downarrow G & & \\ & & X & & \\ & \nearrow M \circ L & & \searrow h_{N'} & \\ & g_N & & & \\ \Omega_N & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{N'} & & \\ \downarrow & \searrow \mathcal{H}_{N'N}(of) & \downarrow & & \\ \Omega_{N+1} & & \Gamma_{N'+1} & & \\ \downarrow & & & & \\ \Omega_N & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{N'} & & \\ \downarrow & \searrow g_N & \nearrow h_{N'} & \nearrow \pi \circ P & \\ & X & & & \\ & \downarrow H & & & \\ & Y & & & \\ & \vdots & & & \vdots \end{array}$$

где, как и раньше, $U = K^m$, $X = K^n$ и $Y = K^p$. Требуется найти отображение $F: X \rightarrow X$, соответствующее штриховой стрелке. Но так как g_N (в верхней части диаграммы) сюръективно и $h_{N'}$ (в нижней части) биективно, мы можем воспользоваться леммой Зейгера о заполнении (6.2) и доказать существование *единственного* отображения F . Кроме того, из диаграммы следует, что

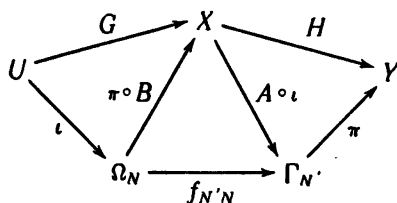
$$(11.28) \quad F = \pi \circ P \circ \mathcal{H}_{N'N}(\sigma f) \circ M \circ \iota,$$

или что

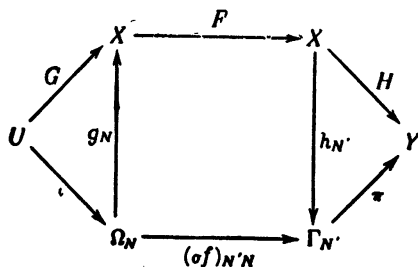
$$(11.16^*) \quad F = E_{pN'}^n P (\sigma \mathcal{H})_{N'N} M E_m^{mN}.$$

Основываясь на симметрии диаграммы, мы можем ожидать, что в общем случае отображение F необратимо. Действительно, F обратимо тогда и только тогда, когда отображения σ , μ и ρ также обратимы, что в общем случае неверно. Заметим также, что F нельзя в общем случае вычислить, не обращая матриц A и B . Это связано с тем, что $f_{N'N}$ в общем случае необратимо. Короче говоря, формулы Б. Л. Хо дают наиболее эффективный способ определения искомых F , G и H . Никакие другие формулы в общем случае не работают.

Шаг 5. Проверка того, что (F, G, H) определяют реализацию. То, что $A_1 = HG$, следует сразу из коммутативности диаграммы



(верхний контур определяет HG , а нижний определяет A_1). С помощью диаграммы, использованной для вычисления F , мы построим диаграмму



доказывающую, что $A_2 = HFG$. Повторяя этот же прием, мы сможем доказать, что $A_i = HF^{i-1}G$ при всех $i > 2$.

(11.29) **Замечание.** Алгоритм Б. Л. Хо замечателен тем, что он обходится без определения инвариантов модуля X_f , индуцированного отображением f . В то же время он дает нам все то, что дают инварианты. Напротив, примитивная реализация, определяемая леммой (11.7), зависит от знания аннулирующего многочлена θ модуля X_f . Поскольку же мы не знаем, справедливо ли равенство $\theta = \psi_f$ или нет и какова циклическая структура, размерность реализации нужно выбирать так, чтобы формулы были справедливы в самом худшем возможном случае, т. е. если $\psi_1 = \dots = \psi_q$. В связи с этим приходится полагать $n = [\min(m, p)][\deg \theta]$, а это значит, что полученная реализация, описываемая формулами (11.8)–(11.10), почти во всех случаях будет неминимальной. Теорема Б. Л. Хо показывает, кроме того, что неэффективную реализацию (11.8)–(11.10) можно упростить в том случае, когда нам известен лишь ранг матрицы $\mathcal{H}_{N'N}(f)$ для достаточно больших N и N' . Другими словами, формулы (11.16)–(11.18) минимальной реализации можно рассматривать как достаточно хорошо «отредактированный» вариант реализации (11.8)–(11.10). Отметим еще, что от простого и с первого взгляда полезного уравнения (11.10) для F приходится отказаться в процессе этого «редактирования» (обратитесь еще и к замечаниям в конце § 10.10b).

(11.30) **Замечание.** Второе доказательство довольно ясно свидетельствует о том, что инварианты не играют в теореме Б. Л. Хо никакой роли. В этой теореме мы заменяем блочные матрицы размера $(r \times r)$ на блочные матрицы размера $(N' \times N)$ и отказываемся от использования леммы (11.5) (и даже аннулирующего многочлена), предпочитая основываться на условиях (11.24) и (11.25) убывания и возрастания соответствующих цепочек. Нарушая блочную структуру матрицы $\mathcal{H}(f)$, мы можем измельчить эту цепочку и дальше так, что придется иметь дело лишь с невырожденными подматрицами матрицы $\mathcal{H}(f)$. (С вычислительной точки зрения этот путь лишь незначительно отличается от процесса определения ранга матрицы $\mathcal{H}_{rr}(f)$.)

(11.31) **Замечание.** Важно отметить, что хотя при $r < \dim f$ лемма (11.5) уже неверна, этот факт совершенно не влияет на алгоритм реализации. Например, пусть F — циклическая матрица размера $(n \times n)$. Рассмотрим ганкелеву матрицу \mathcal{H} , определяемую последовательностью $\{I, F, F^2, \dots\}$. Поскольку \mathcal{H} реализуется тройкой (F, I, I) , ясно, что можно положить $N < N' = 1$, хотя $r = n$ (по определению цикличности). Поэтому для того, чтобы доказать справедливость алгоритма (11.14), не требуется теории модулей. Но, с другой стороны, структурная теория модулей, развитая в § 10.8 и 10.10, довольно полезна для того, чтобы убедиться в возможностях предложенного алгоритма.

Все приведенные выше предварительные результаты позволяют поставить один основной вопрос. Предположим, что отображение вход — выход f и соответствующая последовательность $\{A_1, A_2, \dots\}$ заданы, но мы ничего не знаем и не предполагаем относительно конечномерности отображения f . (Другими словами, у нас нет возможности выполнить шаг 1 алгоритма (11.14).) Предположим, что мы выбрали r (или пару (N, N') произвольным образом, а затем с помощью шагов 2 и 3 алгоритма (11.14) вычислили динамическую систему Σ . Каковы же свойства этой системы? И в частности, реализует ли система Σ некоторую часть последовательности $\{A_1, A_2, \dots\}$? Является ли эта реализация канонической? Наиболее полный ответ на этот вопрос из всех известных к настоящему времени (1967) дается следующим основным результатом этого параграфа.

(11.32) Критерий реализуемости. Пусть $\{A_1, A_2, \dots\}$ — произвольная бесконечная последовательность матриц размера $(p \times m)$ над K , и пусть \mathcal{H} — соответствующая ганкелева матрица. Тогда система Σ , определенная по формулам (11.16*) — (11.18*), реализует эту последовательность вплоть до члена A_{N_0} включительно, т. е. уравнение (11.6) справедливо при $i = 1, \dots, N_0$ тогда (i) и только тогда (ii), когда существуют положительные целые N и N' , такие, что:

$$(a) N + N' = N_0 \text{ и}$$

$$(b) \text{rank } \mathcal{H}_{N'N} = \text{rank } \mathcal{H}_{N'+1, N} = \text{rank } \mathcal{H}_{N', N+1}.$$

Доказательство. (ii) **Необходимость.** Пусть матрицы системы Σ удовлетворяют уравнениям (11.16*) — (11.18*), а система реализует конечную последовательность $\{A_1, \dots, A_{N_0}\}$. Тогда

$$\dim f_{\Sigma} \leq \dim \Sigma = \text{rank } \mathcal{H}_{N'N} \leq \begin{Bmatrix} \text{rank } \mathcal{H}_{N'+1, N} \\ \text{rank } \mathcal{H}_{N', N+1} \end{Bmatrix} \dim f_{\Sigma},$$

где последнее неравенство вытекает из леммы (11.12), если учесть, что все элементы матрицы $\mathcal{H}_{N'+1, N}$, так же как и все элементы матрицы $\mathcal{H}_{N', N+1}$, принадлежат последовательности $\{A_1, \dots, A_{N_0}\}$.

(i) **Достаточность.** Заметим, что во втором доказательстве алгоритма (11.14) мы воспользовались предположением о конечномерности отображения f всего один раз — в коммутативной диаграмме (11.27), где нужно было доказать существование отображений $\mu_N: \Omega_{N+1} \rightarrow \Omega_N$ и $\rho_{N'}: \Gamma_{N'} \rightarrow \Gamma_{N'+1}$. Условие

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N} = \text{rank } \mathcal{H}_{N'+1, N}$$

означает, что последняя блочная строка матрицы $\mathcal{H}_{N'+1, N}$ линейно связана с предыдущими блочными строками, т. е. линейно зависит от $\mathcal{H}_{N'N}$. Это означает, что выходной сигнал $y(N' + 1)$ можно вычислить с помощью линейной комбинации значений $y(1), \dots, y(N')$.

Поэтому существует отображение

$$\rho_{N'}: \gamma_{N'} \mapsto \gamma_{N'+1} = (\gamma_{N'}, y(N' + 1)).$$

Аналогичным образом условие

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N} = \text{rank } \mathcal{H}_{N', N+1}$$

гарантирует существование отображения μ_N . Тот факт, что эти отображения не нарушают коммутативности диаграммы (11.27), следует сразу из специфического расположения элементов A_i в ганкелевых матрицах.

Остается доказать, что при этих условиях система Σ , заданная уравнениями (11.16*)—(11.18*), реализует последовательность $\{A_1, \dots, A_{N_0}\}$. Это делается в точности так же, как в шаге 4 второго доказательства алгоритма (11.14), в котором используются лишь описания отображения $f_{N'N}$ и коммутативная диаграмма (11.27).

(11.33) **Следствие.** Если условия (а) и (б) теоремы (11.32) выполнены, то система Σ , заданная уравнениями (11.16*)—(11.18*), является канонической.

Доказательство. Система Σ представляет собой действительную (а не частичную) реализацию одного отображения вход — выход, а именно своего собственного отображения. Поэтому система Σ является реализацией отображения f_Σ , вычисленного согласно алгоритму (11.14). Поэтому система Σ каноническая.

Утверждение этого следствия далеко не тривиально (см. пример (11.40), приведенный ниже).

Содержание теоремы (11.32) можно сформулировать более четко с помощью новой терминологии. Будем говорить, что Σ *частично реализует* отображение вход — выход тогда и только тогда, когда уравнение (11.6) справедливо для $i = 1, \dots, N_0$ ¹⁾. Число N_0 называется тогда *порядком* частичной реализации. Если Σ — частичная реализация отображения f , то $f - f_\Sigma$ называется *остатком* отображения f (относительно системы Σ).

Ясно, что у каждого отображения вход — выход существуют конечномерные канонические частичные реализации любого порядка N . Для того чтобы доказать это, возьмем произвольные константы $\beta_1, \dots, \beta_{N_0} \in K$, а затем продолжим частичную последовательность $\{A_1, \dots, A_{N_0}\}$, используя рекуррентную формулу из леммы (11.5). Верхней гранью размерности этой реализации будет, естественно, $\min(mN_0, pN_0)$.

¹⁾ Или можно говорить, что Σ реализует *частично определенное отображение* вход — выход. Различие между этими двумя точками зрения здесь несущественно.

Минимальной частичной реализацией назовем частичную реализацию минимальной размерности. Легко видеть, что «минимальность» частичной реализации гарантирует и ее «каноничность». Однако из того, что реализация «каноническая», не следует, что она «минимальна», в действительности мы увидим, что «минимальная» реализация необязательно единственна. Пользуясь нашей новой терминологией, мы можем сформулировать теорему (11.32) в следующем эквивалентном виде.

(11.34) **Теорема.** Система Σ , определяемая уравнениями (11.16*)—(11.18*), представляет собой минимальную частичную реализацию порядка N_0 отображения вход — выход f тогда и только тогда, когда $N_0 = N + N'$ и выполняются ограничения на ранги (11.32b). Более того, если последние ограничения не выполняются, то каждая частичная реализация отображения f имеет размерность, большую, чем ранг матрицы $\mathcal{H}_{N'N}$.

В одном интересном случае условия (11.32) выполняются автоматически.

(11.35) **Предложение.** Рассмотрим скалярный случай $m = p = 1$. Пусть $\text{rank } \mathcal{H}_{nn}(f) = n$. Тогда уравнения (11.16)—(11.18) определяют единственную частичную реализацию отображения f , для которой $N_0 = 2n$, и эта частичная реализация отображения f является минимальной.

Доказательство. В данном случае условие (11.32b) тривиально выполняется. Поэтому уравнения (11.16)—(11.18) определяют частичную реализацию Σ отображения f , причем $\dim \Sigma \geq \text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f)$ при всех N и N' . Поэтому рассматриваемая частичная реализация наверняка минимальна, что и завершает доказательство.

Если условие (11.32b) не выполняется, то минимальная частичная реализация отображения вход — выход f может быть не единственной, поскольку тогда придется задать новую матрицу A_{N_0+1} , чтобы иметь возможность использовать формулы (11.16*)—(11.18*). Другими словами, матрица A_{N_0+1} определяется необязательно единственным образом из требования минимальной размерности искомой реализации.

Если же условие (11.32b) выполнено, но ранг матрицы $\mathcal{H}_{N'N}$ меньше чем $\dim f$, то, вычисляя реализацию по формулам (11.16*)—(11.18*), мы получаем частичную реализацию, но она может оказаться не слишком хорошей. Однако мы можем по крайней мере быть уверены, что частичная реализация f не слишком затрудняет реализацию остатка отображения f .

(11.36) **Предложение.** Если для f существует конечномерная реализация, то остаток от частичной реализации отображения f также имеет конечномерную реализацию.

Доказательство. Пусть $\{A_1, A_2, \dots\}$ — бесконечная последовательность, индуцированная отображением f . Пусть Σ^* — некоторая частичная реализация отображения f , и пусть $\{B_1, B_2, \dots\}$ — бесконечная последовательность, индуцированная f_{Σ^*} . Тогда остаток $f - f_{\Sigma^*}$ индуцирует бесконечную последовательность $\{0, \dots, 0, A_{N_0+1} - B_{N_0+1}, \dots\}$. Поскольку по предположению как f , так и f_{Σ^*} конечномерны, лемма (11.12) показывает, что

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) \leq \dim f$$

и

$$\text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f_{\Sigma^*}) \leq \dim f_{\Sigma^*}$$

при любых положительных N и N' . А так как \mathcal{H} есть аддитивный функционал, определенный на последовательностях, индуцированных f , имеем

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f - f_{\Sigma^*}) &= \text{rank}[\mathcal{H}_{N'N}(f) - \mathcal{H}_{N'N}(f_{\Sigma^*})] \leq \\ &\leq \text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f) + \text{rank } \mathcal{H}_{N'N}(f_{\Sigma^*}) \leq \\ &\leq \dim f + \dim f_{\Sigma^*} < \infty. \end{aligned}$$

Другое доказательство, использующее лишь понятия теории систем, схематически показано на рис. 10.4. Предлагаем читателю самостоятельно получить его словесную формулировку.

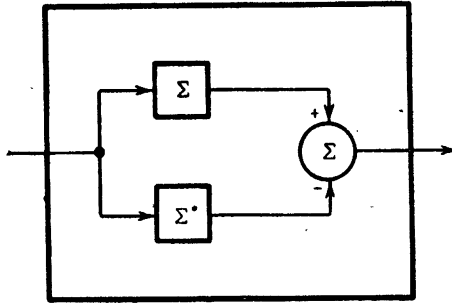


Рис. 10.4. Графическое доказательство предложения (11.36). Здесь Σ — реализация отображения f ; Σ^* — частичная реализация отображения f , а система в большой рамке — реализация отображения $(f - f_{\Sigma^*})$.

К сожалению, решить, полезна ли частичная реализация отображения f или нет, далеко не просто. С одной стороны, ее можно в содержательном смысле считать полезным приближением минимальной реализации отображения f (см. пример (11.40) ниже). Но с другой стороны, рассмотрим дробно-рациональную передаточную матрицу

$$W(z) = W_1(z) + z^{-h}W_2(z)$$

(см. предложение (11.37) ниже). Выберем h достаточно большим, например намного больше степени общего знаменателя матрицы W_1 . Тогда второе слагаемое не скажется на \mathcal{H}_r , $\deg \psi_{W_i} \leq r \ll h$, и, следовательно, с помощью формул (11.16) — (11.18) мы построим минимальную реализацию Σ_1 передаточной матрицы W_1 . Но так как

$$W(z) - W_{\Sigma}(z) = W(z) - W_1(z) = z^{-h} W_2(z),$$

ясно, что минимальная реализация остатка будет иметь размерность, равную $\dim z^{-h} W_2(z)$. (Упражнение: докажите это с помощью теории инвариантов из § 10.10.)

Более глубокое исследование теории минимальной реализации частичных отображений вход — выход содержится в работе Калмана [1968] и в приложении В.

Займемся теперь вопросом о применении алгоритма Б. Л. Хо. Прежде всего отметим тривиальный, но интересный факт.

(11.37) Предложение. Пусть $\{A_1, A_2, \dots\}$ — бесконечная последовательность, индуцированная отображением вход — выход f по формуле (11.1). Тогда передаточная функция, соответствующая отображению f , может быть вычислена по формуле

$$W_f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i z^{-i}.$$

Доказательство. Это просто переформулировка исходного определения.

Приведенный результат важен, поскольку показывает, что фундаментальные параметры $\{A_1, A_2, \dots\}$, необходимые для алгоритма реализации, можно получить и из передаточной функции отображения f . Для этого нам нужно представить W_f сходящимся степенным рядом в окрестности бесконечности, а A_i будут как раз коэффициентами этого ряда. Таким образом, алгебраические вычисления, предписываемые алгоритмом Б. Л. Хо, остаются одними и теми же, независимо от того, пользуемся ли мы данными из частотной (W) или временной (f) области.

Оказывается, что алгоритм остается в точности таким же, даже если перейти от систем с дискретным временем к системам с непрерывным временем. Набросаем общую линию рассуждений. Прежде всего пусть $K = \mathbb{R}$. Импульсная характеристика $L(\cdot)$ стационарной вещественной линейной системы с непрерывным временем описывается формулой

$$L(t) = \begin{cases} He^{Ft}G, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

(за подробностями отсылаем к § 10.13). Легко видеть, что $L(\cdot)$ представляет собой вещественную целую функцию на интервале $[0, \infty]$, допускающую разложение в степенной ряд

$$He^{Ft}G = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_{i+1}t^i}{i!},$$

где A_i удовлетворяют уравнению (11.6). Таким образом, основная информация для алгоритма Б. Л. Хо может быть получена в результате вычисления производных от $L(\cdot)$ в точке $t = 0$. (Это не слишком практично, но к этому вопросу мы еще вернемся в замечании (11.38) ниже.) Передаточная матрица стационарной вещественной линейной системы с непрерывным временем удовлетворяет уравнению

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G,$$

которое совпадает с соответствующим выражением для системы с дискретным временем. Поэтому необходимые для алгоритма данные можно получить и в частотной области.

(11.38) Замечание. Поскольку алгоритм преследует цель обеспечить равенство *первых* N_0 членов последовательности $\{A_1, A_2, \dots\}$, из предыдущего ясно, что с эвристической точки зрения этот алгоритм обращает основное внимание на *высокочастотные свойства отображения вход — выход*. Но это создает большие практические трудности, связанные с присутствием измерительных помех и низкочастотных систематических ошибок. Все эти проблемы хорошо известны и давно опубликованы (см. работу Калмана [1958], в которой затрагиваются тесно связанные с этим вопросы), но они никогда еще не были тщательно исследованы.

(11.39). Замечание. Алгоритм Б. Л. Хо можно также рассматривать как средство получения дробно-рациональной аппроксимации (сходящихся или формальных) степенных рядов, гарантирующее совпадение *первых* N_0 членов разложения. Некоторые алгебраические черты нашего метода в действительности связаны с классической теорией *аппроксимаций Падэ* (см. работу Хо и Калмана [1970] и приложение В).

Закончим этот параграф одним численным примером.

(11.40) Пример. Рассмотрим отображение вход — выход, индуцирующее последовательность

$$(11.41) \quad 1, 1, 1, 2, 1, 3, ?, ??, \dots$$

Поскольку матрица \mathcal{H}_{11} есть матрица полного ранга, реализация первых двух членов имеет вид

$$\Sigma_1 = (1, 1, 1),$$

и соответствующая бесконечная последовательность выглядит следующим образом:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

Последовательность отстатка имеет вид

$$(11.42) \quad 0, 0, 0, 1, 0, 2, ?-1, ??-1, \dots$$

Ганкелева матрица этого отстатка размера (4×4) имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & ?-1 \end{bmatrix},$$

и независимо от выбора (?) она имеет полный ранг. Поэтому в силу предложения (11.35) последовательность отстатка (11.41) имеет 4-мерную реализацию. Поскольку каждая реализация последовательности (11.42) индуцирует $A_7 = ?-1$ и $A_8 = ??-1$, то существует ровно ∞^2 неизоморфных минимальных реализаций последовательности (11.42). (Одновременно мы имеем пример частичной последовательности с $N_0 = 2n$ и $\mathcal{H}_{nn} < n$, минимальная реализация которой неединственна.) Теперь мы знаем, что последовательность (11.41) может быть реализована системой, размерность которой не выше 5. Сравним это утверждение с предложением (11.36) и его доказательством. На самом же деле для последовательности (11.41) имеется минимальная трехмерная реализация. Действительно, для последовательности (11.41) матрица

$$\mathcal{H}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет полный ранг. Подходящая пара (P, M) , удовлетворяющая условиям (11.15), имеет следующий вид:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда формулы (11.16)–(11.18) позволяют вычислить

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ 0]^1).$$

¹⁾ Соответствующая передаточная функция в данном случае будет равна $(z^2 + 2z + 1)/(z^3 + z^2 - z - 2)$.

Для этой реализации $? = 2$, $?? = 3$, $??? = 5$, $???? = 2$, $?^5 = 9$. (Непросто догадаться, что именно так выглядит естественное продолжение последовательности (11.41)!) Наконец, отметим, что если воспользоваться формулами (11.16) — (11.18) для последовательности (11.41) при $r = 2$, то получится, например,

$$F = I, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0],$$

а все A_i окажутся равными 1, так же как и в случае $r = 1$. Таким образом, если условие (11.32b) не выполняется, то система, сконструированная согласно формулам (11.16) — (11.18), может оказаться и не канонической, и не частичной реализацией.

(11.43) **Упражнение.** Докажите, что минимальная реализация бесконечной последовательности

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

двумерна.

(11.44) **Упражнение (простое).** Реализуйте последовательность Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

(11.45) **Упражнение (трудное).** Докажите, что последовательность простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

не имеет конечномерной реализации.

10.12 Полугруппы и простые линейной конечномерной системы

Этот параграф носит чисто иллюстративный характер. В нем мы рассмотрим на примере задачу вычисления простых в смысле Крона — Роудза. Поскольку их теория приложима только для конечномерных систем, нам потребуется рассматривать только такие поля K , для которых $X = K^n$ — некоторое конечное множество. Итак, *предположим, что K — конечное поле*. (С теорией конечных полей можно познакомиться по книге Альберта [1956].)

Первый шаг состоит в определении полугруппы S_Σ линейной системы Σ . А для этого нам потребуется согласовать между собой некоторые понятия теории автоматов и теории модулей.

Начнем с напомним некоторых определений § 7.2. Как обычно, будем обозначать входные и выходные алфавиты через U и Y . В теории автоматов *отображением вход — выход* называется $f: U^* \rightarrow Y$, где U^* — свободная полугруппа над U (т. е. множество всевозможных последовательностей символов из U с операцией сшивания в качестве умножения). *Отношение эквивалентности Май-*

хилла, \equiv_f , индуцируемое отображением f в U^* , определяется условием

$$(12.1) \quad \omega \equiv_f \omega' \text{ тогда и только тогда, когда} \\ f(\alpha \circ \omega \circ \beta) = f(\alpha \circ \omega' \circ \beta) \text{ при любых } \alpha, \beta \in U^*.$$

Множество $S_f = \{\{\omega\}_f: \omega \in U^*\}$ классов эквивалентности Майхилла, индуцируемое f , является полугруппой с умножением, определенным следующим образом:

$$(12.2) \quad \{\omega\}_f \cdot \{\omega'\}_f = \{\omega \circ \omega'\}_f.$$

Это S_f мы называем *полугруппой* отображения f . Аналогично мы определим структуру полугруппы на $\Omega = K^m[z]$, воспользовавшись в качестве умножения операцией (12.2) на множестве Ω/\equiv_f . Если система Σ есть каноническая реализация отображения f , то *необходимо* положить $S_\Sigma = S_f$. Любое другое определение не будет согласовываться с существованием взаимно однозначного соответствия между отношениями вход — выход и их минимальными реализациями. В общем случае естественно выражать S_Σ через функции перехода в пространстве состояний системы Σ (но это обсуждается ниже).

Для наших целей вместо того, чтобы рассматривать кольцо обычных многочленов $K[z]$, удобнее рассматривать кольцо *многочленов формальной степени*, или просто *формальные многочлены*, которое мы также будем обозначать через $K[z]$. Это позволит нам использовать и многочлены, у которых главный коэффициент равен нулю. Точнее говоря, мы рассматриваем следующую ситуацию. Теперь $K[z]$ есть множество пар (π, d) , где π — обычный многочлен, а $d = d_\pi$, *формальная степень* многочлена π , есть произвольное целое число $d \geq \deg \pi$, где $\deg \pi$ — обычная степень многочлена π . Эти пары образуют кольцо со сложением и умножением, использующими главные члены даже тогда, когда их коэффициенты равны нулю,

$$(\pi, d) + (\pi', d') = (\pi + \pi', \max(d, d')), \\ (\pi, d) \cdot (\pi', d') = (\pi\pi', d + d').$$

Читателю следует формально проверить выполнимость аксиом кольца (см. аксиомы (A.1) и (A.2) из приложения)¹⁾.

Множество $K[z]$ таких формальных многочленов изоморфно множеству K^* всевозможных конечных цепочек (произведений), составленных из символов K . Каждой цепочке λ длины l_λ из K^* можно поставить в соответствие некоторый формальный много-

¹⁾ Другой подход заключается в том, чтобы задать на U^* структуру векторного пространства, а затем рассматривать U^* как пространство входных воздействий некоторой линейной системы.

член $(\pi_x, l_x - 1)$, коэффициентами которого являются элементы \mathfrak{K} . (В частности, цепочка из l нулей определяет формальный многочлен $(0, l - 1)$.) Этот изоморфизм множеств распространяется и на структуру полугруппы: умножение в K^* выражается через умножение в $K[z]$, согласно соотношению

$$(12.3) \quad (\pi, d) \circ (\pi', d') = (z^{d'+1}\pi + \pi', d + d' + 1).$$

(Единицей относительно операции сшивания является элемент $(0, -1)$, но это нам понадобится только при доказательстве эквивалентности утверждений (12.7) и (12.9).) Наконец, m -мерный вектор формальных многочленов, естественно, определяется как

$$\begin{bmatrix} (\pi_1, d) \\ \vdots \\ (\pi_m, d) \end{bmatrix}, \quad \text{где } d \geq \deg \pi_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

(12.4) **Определение.** Структура полугруппы в $\Omega = K^m[z] \approx (K^m)^*$, равная свободной полугруппе в K^m , определяется следующим образом:

(а) $K^m[z]$ рассматривается как множество m -мерных векторов формальных многочленов;

(б) на $K^m[z]$ определяется операция умножения (сшивание) типа (12.3).

Для заданной динамической системы Σ рассмотрим различные связанные с ней объекты $(\Omega, X, \varphi, F, G, \dots)$. (Для упрощения обозначений мы будем опускать нижний индекс Σ каждый раз, когда это не будет вносить путаницы.) Определим сначала семейство отображений вход — выход

$$\mathcal{F} = \{f_x: x \in X\},$$

где

$$f_x: \Omega \rightarrow X: (\omega, d) \mapsto \varphi(1; -d, x, (\omega, d)).$$

(Напомним, что φ есть переходное отображение (1.1) системы Σ .) Семейство \mathcal{F} показывает всевозможные виды действия Ω на Σ . Определим отношение $\equiv_{\mathcal{F}}$, потребовав, чтобы оно совпадало с \equiv_{f_x} при любых $f_x \in \mathcal{F}$. Тогда можно сформулировать следующее определение.

(12.5) **Определение.** Полугруппой S_{Σ} динамической системы Σ называется полугруппа классов эквивалентности $\Omega_{\Sigma}/\equiv_{\mathcal{F}}$ с операцией сшивания в качестве умножения.

(12.6) **Упражнение.** Докажите, что $S_{\Sigma} = S_f$, если Σ — минимальная реализация отображения f .

Определение (12.5) является содержательным для произвольных динамических систем. Мы же хотим выяснить, к каким упрощениям можно прийти, если предположить, что: (1) система Σ линейна (а также конечномерна и с дискретным временем) и (2) пространство состояний системы Σ конечно.

По-видимому, наиболее убедительный подход к решению этой задачи состоит в вычислении S_Σ с помощью уравнений перехода в пространстве состояний (1.5). Утверждение

$$\omega \equiv \mathcal{F}v,$$

с абстрактных позиций эквивалентное следующему:

$$f_x(\alpha \circ \omega \circ \beta) = f_x(\alpha \circ v \circ \beta) \quad \text{для всех } \alpha, \beta \in \Omega, \text{ все } x \in X,$$

с помощью уравнений (1.5) может быть приведено к виду

$$(12.7) \quad \begin{aligned} F^{d_\beta+1} [F^{d_\omega+1} (F^{d_\alpha+1} x + x_\alpha) + x_\omega] + x_\beta = \\ = F^{d_\beta+1} [F^{d_v+1} (F^{d_\alpha+1} x + x_\alpha) + x_v] + x_\beta, \end{aligned}$$

где

$$(12.8) \quad x_\omega = \sum_{-d_\omega \leq t \leq 0} F^{-t} G \omega(t).$$

Упрощая выражение (12.7), мы получаем, что

$$(12.9) \quad \omega \equiv \mathcal{F}v \text{ тогда и только тогда,}$$

$$\text{когда } \begin{cases} x_\omega = x_v, \\ F^{d_\omega+1} x = F^{d_v+1} x \end{cases} \text{ для всех } x \in X.$$

Обозначение, принятое в уравнении (12.8), с содержательной точки зрения выражает следующее: x_ω есть состояние, устанавливаемое входным воздействием (ω, d) в момент времени $t = 1$. Совершенно ясно, что x_ω зависит от ω , но не зависит от d_ω , если $d_\omega > \deg \omega$. (С точки зрения теории систем это очевидно: пока входное воздействие остается нулевым, нулевым будет и состояние системы, находившейся в нем до этого.) Но в соответствии с соотношением (12.9) отображение $\omega \mapsto x_\omega$ постоянно на классах эквивалентности $\{\omega\}_{\mathcal{F}}$. Поэтому существует строго определенное отображение

$$(12.10) \quad \rho: S \rightarrow X: \{\omega\}_{\mathcal{F}} \mapsto x_\omega.$$

Для того чтобы найти место этому соответствию в теории автоматов, читателю следует убедиться, что ρ есть просто проекция класса эквивалентности Майхилла на класс эквивалентности Нерода, содержащий первый из этих классов.

Воспользуемся теперь предположением о конечномерности пространства состояний системы Σ . Отметим прежде всего, что мини-

мальный многочлен ψ такой системы Σ имеет однозначное представление вида

$$\psi(z) = z^r \theta(z), \quad \text{где } \theta(0) \neq 0, \quad r \geq 0.$$

Воспользуемся затем одним фактом теории конечных полей, согласно которому для любого многочлена $\theta \in K[z]$, где K конечно, существует такое $q \in \mathbb{Z}$, что $\theta \mid (z^q - 1)$. Наименьшее такое q является *периодом* многочлена θ и обозначается через $p(\theta) = P$. Но тогда, согласно теореме Кэли — Гамильтона,

$$(12.11) \quad F^{k+P} = F \quad \text{для всех } k \geq r.$$

Соотношение (12.11) индуцирует конечную циклическую абелеву полугруппу C с индексом r и периодом P , записываемую аддитивно (см. § 8.2, в котором аналогичный результат получен без ссылки на конечность поля). Другими словами, полугруппа C определяется следующим образом:

$$(12.12) \quad C: \begin{cases} \text{элементы: } 0, 1, \dots, (P+r-1); \\ \text{сложение: обычное сложение по модулю } P, \text{ так что} \\ \quad P+r=r; \\ \text{наибольшая подгруппа: } r, r+1, \dots, (P+r-1). \end{cases}$$

Если теперь $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a = b$ в смысле соотношения $P+r=r$, то мы будем писать, что $a = b \pmod{C}$. Тогда, согласно определению (12.9) и соотношению (12.11), можно определить отображение

$$(12.13) \quad \sigma: S \rightarrow C: \{\omega\}_{\mathcal{F}} \mapsto 1 + d_{\omega} \pmod{C},$$

или в более симметричных обозначениях

$$\sigma: \{\omega\}_{\mathcal{F}} \mapsto \sigma(\{\omega\}_{\mathcal{F}}) = l_{\omega} \in C.$$

Поскольку отношение (12.9) определяет эквивалентность, становится ясным, что множество S изоморфно множеству $X \times C$ и что этот изоморфизм устанавливается отображением

$$\rho \times \sigma: \{\omega\}_{\mathcal{F}} \mapsto (x_{\omega}, l_{\omega}).$$

Интересно выяснить, можно ли использовать этот изоморфизм также и для того, чтобы установить структуру полугруппы в S , т. е. можно ли задать структуру полугруппы в S с помощью структуры абелевой группы в X (пространстве состояний) и структуры циклической полугруппы в C .

Прежде всего отметим, что определение сшивания (12.3) показывает, что

$$x_{\omega \circ \nu} = F^{d_{\nu}+1} x_{\omega} + x_{\nu};$$

во-вторых,

$$l_{\omega \circ \nu} = d_{\omega \circ \nu} + 1 = d_{\omega} + d_{\nu} + 2 = l_{\omega} + l_{\nu} \pmod{C}.$$

Таким образом, умножение в S_Σ можно представить в виде

$$(12.14) \quad (x_\nu, l_\nu) \circ (x_\omega, l_\omega) = (F^{l_\omega} x_\nu + x_\omega, l_\nu + l_\omega).$$

Это показывает, что S есть полупрямое произведение X на C с отображением F в качестве гомоморфизма связи (см., например, § 7.3 настоящей книги или § 6.5 книги Холла [1959]). Таким образом, мы доказали¹⁾ следующую теорему.

(12.15) Теорема. *Полугруппа S_Σ линейной конечномерной динамической системы Σ с дискретным временем над некоторым конечным полем является полупрямым произведением*

$$S_\Sigma = X_\Sigma \times_{F_\Sigma} C_\Sigma,$$

определенным согласно соотношению (12.14), где C_Σ — некоторая конечная циклическая полугруппа с периодом $p(\theta_\Sigma)$ и индексом r_Σ , $z^{r_\Sigma} \theta_\Sigma = \chi_\Sigma$; здесь χ_Σ — минимальный многочлен системы Σ , а $p(\theta_\Sigma)$ — период многочлена θ_Σ .

(12.16) Следствие. *Если $\det F_\Sigma \neq 0$, то C_Σ есть циклическая группа порядка $p(\psi_\Sigma)$ и S_Σ также является группой.*

Доказательство. Так как $\det F_\Sigma \neq 0$ гарантирует, что $r_\Sigma = 0$, ясно, что C_Σ есть некоторая циклическая группа. У каждого элемента S_Σ есть обратный

$$(x_\omega, l_\omega)^{-1} = (-F_\Sigma^{-l_\omega} x_\omega, -l_\omega).$$

Поэтому S_Σ является группой.

Теперь мы в состоянии установить связь с теорией декомпозиции, развитой в гл. 7 и 8.

(12.17) Упражнение. Реализуйте линейную систему Σ с конечным пространством состояний в виде конечного автомата, представляющего собой последовательное соединение факторполугруппового автомата, соответствующего S_Σ/X_Σ , и следующего за ним автомата нормальной подгруппы, соответствующего X_Σ (см. § 9.1).

(12.18) Замечание. Упражнение (12.17) приводит к довольно «нестественной» реализации линейной системы. И это неудивительно, поскольку основная цель теории Крона — Рудза состоит в формулировке и доказательстве теорем существования последовательно-параллельных реализаций, которые почти всегда оказываются неминимальными. (Не минимальна ли реализация из упражнений

¹⁾ Этот результат был впервые получен, по-видимому, Зейгером (пользовавшимся непосредственно теорией групп) в неопубликованном отчете (ноябрь 1964 г.).

(12.17)?) В этом смысле теория модулей, гарантирующая минимальность реализаций, безусловно превосходит теорию Крона — Роудза. Но, с другой стороны, последняя применима и для нелинейных систем, а это во много раз труднее.

(12.19) Упражнение. Докажите, что простые элементы конечной абелевой группы являются циклическими группами $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p простое.

(12.20) Упражнение. Докажите, что простые элементы конечной циклической полугруппы являются в точности такими же, как и простые конечной циклической группы плюс ее единицы (см. лемму (2.3) из гл. 9).

(12.21) Упражнение. Докажите, что простые элементы полупрямого произведения содержатся в объединении простых элементов сомножителей.

С помощью этих фактов можно доказать основной результат настоящего параграфа.

(12.22) Теорема. Простые элементы линейной конечномерной динамической системы (с дискретным временем) над конечным полем являются циклическими группами с простыми порядками.

(12.23) Следствие. Каждая циклическая группа простого порядка является простым элементом некоторой системы.

Доказательство. Достаточно положить $K \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p простое и $n = 1$, как X становится абелевой группой порядка p и, следовательно, простым элементом в смысле теории Крона — Роудза.

(12.24) Замечание. Все результаты этого параграфа зависят лишь от двух простых фактов: (1) выполняется уравнение перехода в пространстве состояний вида $x(t+1) = Fx(t)$; (2) множество X является конечным. А так как мы нигде не использовали особые свойства конечных полей, ясно, что все результаты этого параграфа сохраняют свою силу и в том случае, когда U есть произвольное (а не обязательно коммутативное) конечное унитарное кольцо.

10.13 Реализация нестационарных отображений вход — выход с непрерывным временем

В этом параграфе мы будем рассматривать нестационарные системы с непрерывным временем и заниматься их теорией реализации. Поначалу это потребует совершенно другого подхода, чем для систем с дискретным временем, но к концу наше исследование будет все больше и больше напоминать теорию, развитую в § 10.6.

Напомним, как в § 2.2 определялась конечномерная линейная гладкая система Σ над полем вещественных чисел \mathbb{R} . В дифферен-

циальной форме система Σ задавалась векторными уравнениями

$$(13.1) \quad \frac{dx}{dt} = F(t)x + G(t)u(t),$$

$$(13.2) \quad y(t) = H(t)x(t),$$

где $t \in T = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, а $F(\cdot)$, $G(\cdot)$, $H(\cdot)$ и $u(\cdot)$ — вещественные непрерывные функции¹⁾, причем прилагательное «гладкое» будет всегда свидетельствовать о принадлежности рассматриваемого объекта к классу C^q , $q \geq 0$. В пространстве состояний система Σ описывается уравнением (13.2) и уравнением

$$(13.3) \quad x(t) = \varphi(t; \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t, \tau)x + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)G(s)u(s)ds,$$

где $\Phi(\cdot, \cdot)$ есть переходная матрица (отображение), соответствующая $F(\cdot)$. Мы будем по-прежнему пользоваться обозначением $\Sigma = (F(\cdot), G(\cdot), H(\cdot))$. На протяжении всего параграфа мы рассматриваем лишь вещественные системы с непрерывным временем и, следовательно, не будем специально оговаривать это каждый раз. Нас не будет также особо интересовать случай бесконечномерной системы ($n = \infty$).

В связи с этим пространства Ω и Γ целесообразно определять так:

$\Omega_{\tau} = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } u_{\tau}(\cdot): (-\infty, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m: t \mapsto u_{\tau}(t) \text{ с компактным носителем}\};$

$\Gamma_{\tau} = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } y_{\tau}(\cdot): [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p: t \mapsto y_{\tau}(t)\}.$

Число $\tau \in \mathbb{R}$ играет тогда роль «настоящего времени» или «начального времени». (Мы не можем теперь пользоваться нормировкой $\tau = 0$, так как рассматриваемая система нестационарна.) Как правило, мы будем использовать символ t для обозначения будущих моментов времени и символ s — для прошлых.

(13.4) **Определение.** Причинным линейным гладким отображением вход — выход f_{τ}^c (линейной системы Σ) в нулевом состоянии относительно настоящего времени τ называется линейное отображение

$$f_{\tau}^c: \Omega_{\tau} \rightarrow \Gamma_{\tau}: u_{\tau}(\cdot) \mapsto y_{\tau}(\cdot),$$

¹⁾ Многие результаты этого параграфа допускают интересную модификацию в случае, когда Σ определена на подинтервале множества T . Оставляем обсуждение этих возможностей на усмотрение читателя.

определенное для каждого $\tau \in T$ с помощью соотношения

$$(13.5) \quad y_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\tau} L^c(t, s) u_\tau(s) ds, \quad t \geq \tau,$$

в котором функция

$$L^c: (T \times T)^c \rightarrow \{\text{матрицы размера } p \times m\}$$

непрерывна по обоим аргументам, а $(T \times T)^c = \{(t, s): t \geq s\}$. Отображение L^c называют *причинным импульсным отображением (характеристикой)* соответствующей линейной системы.

Отметим, что это определение, так же как и определение из § 10.2, автоматически включает в себя требование причинности (прошлое влияет на будущее, а не наоборот). Принятая здесь терминология существенно отличается от технической тем, что сейчас мы *не требуем* выполнения так называемого «условия причинности»

$$(13.6) \quad L^c(t, s) = 0 \quad \text{для всех } t < s,$$

а предпочитаем считать, что L^c вообще *не обязательно определено* на $T \times T - (T \times T)^c$ и что значения L^c вне $(T \times T)^c$ (если они определены) не влияют на отображение вход — выход f_τ^c (см. уравнение (13.5)). Впоследствии мы увидим, что устанавливать условия причинности с помощью уравнения (13.5) удобнее, чем с помощью (13.6). Заметим еще, что нижний предел $-\infty$ интеграла (13.5) есть не более чем условное обозначение. Ведь, согласно определению Ω_τ , в действительности этот интеграл всегда определяется на компактном интервале.

Подчеркнем еще раз: наше определение отображений вход — выход f_τ^c специально выделяет особую роль настоящего времени τ , которое раньше можно было нормировать в виде $\tau = 0$. Предлагаем читателю самостоятельно вывести все формулы, описывающие поведение системы и обобщающие формулы § 10.1—10.12.

Точно таким же образом, но обратив направление времени, можно определить «антипричинные» отображения вход — выход. Отсылаем читателя к работе Вейсса и Калмана [1965], в которой он найдет исходные понятия, и к работе Калмана [1969], в которой дан более полный анализ.

Если $\{f_\tau^c: \tau \in T\}$ есть семейство отображений вход — выход для нулевого состояния, соответствующих системе Σ , определенной уравнениями (13.2) и (13.13), то простые выкладки показывают, что

$$(13.7) \quad L_\Sigma^c(t, s) = H_\Sigma(t) \Phi_\Sigma(t, s) G_\Sigma(s) \quad \text{на } (T \times T)^c,$$

где L_Σ^c — причинное импульсное отображение системы Σ . Будем говорить, что Σ реализует L^c (или семейство $\{f_\tau^c: \tau \in T\}$) тогда и только тогда, когда $L_\Sigma^c = L^c$ на $(T \times T)^c$. В частности, система Σ реализует единственное отображение вход — выход f_τ^c тогда и только тогда, когда $L_\Sigma^c = L^c$ при всех $t \geq \tau \geq s$. Теперь без труда можно сформулировать следующую хорошо известную теорему.

(13.8) Критерий существования (см. теорему 1 работы Калмана [1963с]). Причинное импульсное отображение можно реализовать конечномерной линейной гладкой динамической системой (i) тогда и (ii) только тогда, когда существуют непрерывные отображения

$$P(\cdot): T \rightarrow \{\text{матрицы размера } p \times n\},$$

$$Q(\cdot): T \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times m\},$$

такие, что

$$(13.9) \quad L^c(t, s) = P(t)Q(s) \text{ для всех } t \geq s.$$

Доказательство. (i) Если справедливо уравнение (13.9), то $\Sigma = (0, Q(\cdot), P(\cdot))$ может служить такой реализацией. Действительно, поскольку переходная матрица $F(\cdot) = 0$ определяет тождественное отображение, условие (13.9) в этом случае эквивалентно условию (13.7).

(ii) Если конечномерная система Σ реализует L^c , то справедливо соотношение (13.7). Если же положить $P(t) = H_\Sigma(t)\Phi_\Sigma(t, r)$, а $Q(s) = \Phi_\Sigma(r, s)G_\Sigma(s)$ (где $r \in T$, причем r произвольно, но фиксировано), то из условия (13.7) в силу свойства композиции переходных отображений следует справедливость уравнения (13.9).

(13.10) Определение. Канонической (или естественной) реализацией (единичного) причинного линейного гладкого отображения вход — выход f_τ^c для нулевого состояния называется конечномерная линейная гладкая динамическая система Σ , реализующая f_τ^c и, кроме того, являющаяся полностью достижимой и полностью наблюдаемой при $t = \tau$.

Аналогично система Σ является канонической реализацией L^c тогда и только тогда, когда она обладает перечисленными выше свойствами при каждом $\tau \in T$.

Читателю следует теперь вернуться к § 2.2 и 2.6, чтобы вспомнить определения и свойства понятий «достижимости» и «наблюдаемости».

Так же как и раньше, конечномерная каноническая реализация Σ отображения f_τ^c отвечает канонической факторизации

$f_{\tau}^c = h_{\tau}^c \circ g_{\tau}^c$, где

$$(13.11) \quad g_{\tau}^c: \Omega_{\tau} \rightarrow X_{\Sigma},$$

$$: u_{\tau}(\cdot) \mapsto \int_{-\infty}^{\tau} \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) u_{\tau}(s) ds;$$

$$(13.12) \quad h_{\tau}^c: X_{\Sigma} \rightarrow \Gamma_{\tau},$$

$$: x \mapsto y_{\tau}(\cdot): [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$: t \mapsto H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, \tau) x.$$

(13.13) **Упражнение.** Убедитесь в том, что утверждение о сюръективности g_{τ}^c эквивалентно утверждению о полной достижимости системы Σ в момент τ , а утверждение о биективности h_{τ}^c эквивалентно утверждению о полной наблюдаемости в момент времени τ .

Поскольку теперь мы не предполагаем стационарности системы, нам потребуется более общее определение эквивалентности системы. При установлении эквивалентности мы будем обращать внимание на следующие свойства системы: ее масштаб времени, причинное импульсное отображение, линейность и гладкость. Эти требования приводят к следующему определению.

(13.14) **Определение.** Две n -мерные линейные гладкие динамические системы Σ и $\hat{\Sigma}$ алгебраически эквивалентны на открытом интервале $J \subset T$ тогда и только тогда, когда существует такое дифференцируемое линейное отображение $A(\cdot): J \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times n\}$, что $\det A(t) \neq 0$ на J , а биективное соответствие

$$(\tau, x) \leftrightarrow (\tau, A(\tau) x) = (\tau, \hat{x})$$

согласуется с структурами Σ и $\hat{\Sigma}$, т. е. соотношения

$$(13.15) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, s) = A(t) \Phi_{\Sigma}(t, s) A^{-1}(s), \\ (b) \quad & F_{\hat{\Sigma}}(t) = A(t) F_{\Sigma}(t) A^{-1}(t) + \dot{A}(t) A^{-1}(t), \\ (c) \quad & G_{\hat{\Sigma}}(t) = A(t) G_{\Sigma}(t), \\ (d) \quad & H_{\hat{\Sigma}}(t) = H_{\Sigma}(t) A^{-1}(t) \end{aligned}$$

выполняются при всех $(t, s) \in (J \times J)^c \subset (T \times T)^c$.

Такая эквивалентность называется *стационарной* тогда и только тогда, когда $A(\cdot) = \text{const}$.

Заметим, что соотношения (13.15) являются естественным обобщением уравнений (1.6) и (1.7).

(13.16) **Замечание.** Термин «алгебраическая эквивалентность» должен указывать на то, что речь идет об относительно слабом виде

изоморфизма. Алгебраическая эквивалентность *не сохраняет* структуру нормированного пространства состояний, поскольку $A(\cdot)$ может быть и неограниченным (если только J некомпактно). *Нормированная алгебраическая эквивалентность* предполагает наличие алгебраической эквивалентности и выполнения условий

$$\|A(t)\| < c_1 \text{ и } \|A^{-1}(t)\| < c_2 \text{ на } J,$$

где c_1 и c_2 не зависят от J . Без этой более сильной эквивалентности не гарантируется сохранение свойств внутренней устойчивости (см. Калман [1962b]; Сильверман, Андерсон [1968]). Здесь же мы не будем более заниматься этим вопросом.

Отношения (13.15) сразу показывают, что

$$(13.17) \quad H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) = H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, s) G_{\Sigma}(s) \text{ для всех } t, s \in J.$$

Отсюда в качестве частного случая получается следующее предложение.

(13.18) **Предложение.** *Причинные отображения вход—выход и причинные импульсные отображения инвариантны относительно алгебраических эквивалентностей на T .*

Как уже отмечалось в § 10.6, первый важный результат теории реализации имел форму следующей теоремы.

(13.19) **Первая теорема единственности** (Калман [1963c], теорема 7 (ii)). *Пусть Σ и $\hat{\Sigma}$ есть две любые (конечномерные) канонические реализации семейства $\{f_{\tau}^c: \tau \in J\}$ причинных отображений вход—выход, где $J \subset T$ есть открытый промежуток.*

Тогда системы Σ и $\hat{\Sigma}$ алгебраически эквивалентны на J . Короче говоря, каноническая реализация единственна с точностью до алгебраической эквивалентности.

В приложении В приводится первое доказательство этой теоремы, полученное весной 1962 г. автором и нигде не публиковавшееся раньше. Оно основывается непосредственно на свойствах достижимости и наблюдаемости. Для удобства мы приведем здесь также и короткое современное доказательство в духе § 10.6.

Доказательство теоремы (13.19). Прежде всего заметим, что теорему достаточно доказать для частного случая $F_{\Sigma}(\cdot) = F_{\hat{\Sigma}}(\cdot) = 0$. Это вытекает из свойства транзитивности алгебраической эквивалентности и следующего хорошо известного факта.

(13.20) **Лемма.** *Каждая конечномерная линейная гладкая динамическая система Σ алгебраически эквивалентна на T системе $\hat{\Sigma}$,*

у которой $F_{\Sigma}(\cdot) = 0$. Изоморфизм этих двух систем задается соотношением $A(\cdot) = \Phi_{\Sigma}(r, \cdot)$, где $r \in T$ произвольно, но фиксировано.

Если $F_{\Sigma}(\cdot) = 0$, то система Σ называется *нормальной*.

Доказательство леммы. Согласно хорошо известной формуле для сопряженной линейной дифференциальной системы, $A(\cdot)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(r, t) = \Phi_{\Sigma}(r, t) F_{\Sigma}(t).$$

Отсюда, очевидно, что $A(\cdot) \in C^1$, а согласно условию (13.15b) имеем $F_{\Sigma}(\cdot) = 0$. Доказательство леммы окончено.

Предположим теперь, что Σ и $\hat{\Sigma}$ нормальны. (Читателю может быть полезно отказаться от использования леммы (13.20) и повторить нижеследующие рассуждения, учитывая множитель $\Phi(r, t)$.)

Если система Σ нормальная и каноническая, то для f_{τ}^c существует каноническая факторизация относительно X_{Σ} при каждом $\tau \in J$. Согласно предположению о полной достижимости в момент времени τ , существует такое $\tau' < \tau$, зависящее от τ , что любое событие (τ, x) является достижимым из $(\tau', 0)$. (См. теорему (2.24) из гл. 2.) Поэтому отображение

$$g_{\tau}^c: \Omega_{\tau} \rightarrow X_{\Sigma},$$

$$: u_{\tau}(\cdot) \mapsto x = \int_{\tau'}^{\tau} G_{\Sigma}(s) u_{\tau}(s) ds$$

является сюръективным. В свою очередь предположение о полной наблюдаемости в момент времени τ гарантирует, что если

$$H_{\Sigma}(t)x = 0 \text{ для всех } t \in [\tau, \infty),$$

то $x = 0$. (См. определение полной наблюдаемости в § 2.6.) Поэтому отображение

$$h_{\tau}^c: X_{\Sigma} \rightarrow \Gamma_{\tau},$$

$$: x \mapsto h_{\tau}^c(\cdot): [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$: t \mapsto H_{\Sigma}(t)x$$

является биективным. Наконец, легко видеть, что $h_{\tau}^c \circ g_{\tau}^c = f_{\tau}^c$ (ср. с доказательством предложения (13.18)), и наше утверждение доказано.

Итак, системы Σ и $\hat{\Sigma}$ определяют две канонические факторизации $h_{\tau}^c \circ g_{\tau}^c = \hat{h}_{\tau}^c \circ \hat{g}_{\tau}^c = f_{\tau}^c$ относительно векторных пространств X_{Σ}

и X_{Σ} . Согласно лемме (6.8), существует такой изоморфизм α_{τ} , что

$$(13.21) \quad \hat{g}_{\tau} = \alpha_{\tau} \circ g_{\tau}$$

и

$$(13.22) \quad h_{\tau} \circ \alpha_{\tau} = h_{\tau}.$$

При каждом τ изоморфизм α_{τ} может быть представлен некоторой постоянной матрицей A_{τ} . В связи с этим соотношения (13.21) и (13.22) эквивалентны следующим:

$$(13.23) \quad G_{\Sigma}(s) = A_{\tau} G_{\Sigma}(s) \text{ для всех } s \in (-\infty, \tau], \text{ все } \tau \in J$$

и

$$(13.24) \quad H_{\Sigma}(t) A_{\tau} = H_{\Sigma}(t) \text{ для всех } t \in [\tau, \infty), \text{ все } \tau \in J.$$

В действительности же отображение A_{τ} постоянно при всех $\tau \in J$. Для того чтобы доказать это, рассмотрим, например, уравнение (13.24). Выберем произвольное $\sigma \in J$, такое, что $\sigma < \tau$. Тогда

$$H_{\Sigma}(t)(A_{\tau} - A_{\sigma}) = 0 \text{ для всех } t \in [\tau, \infty).$$

Если $A_{\tau} \neq A_{\sigma}$, то найдется такое $x \neq 0$, что $x' = (A_{\tau} - A_{\sigma})x \neq 0$. Но тогда $H_{\Sigma}(t)x' = 0$ на $[\tau, \infty)$, а это противоречит условию полной наблюдаемости системы $\hat{\Sigma}$ в точке τ . Таким образом, A_{τ} постоянно при любом $\tau > \sigma$ и $\sigma \in J$, так что A_{τ} постоянно на всем множестве J .

Поскольку A постоянно, оно, очевидно, принадлежит к классу C^1 . Но в наших предположениях условия (13.15a) и (13.15b) тривиальны, а условия (13.15c) и (13.15d) совпадают с уравнениями (13.23) и (13.24), что и доказывает теорему (13.19).

К сожалению, теорема (13.19) не дает исчерпывающего решения задачи реализации. (Такой же вывод, однако, можно получить и из теоремы 8 работы Калмана [1963с].) Причина состоит в том, что в классе гладких динамических систем может не существовать канонической реализации всего семейства $\{f_{\tau}^c: \tau \in T\}$. Это становится ясным даже из простейших примеров.

(13.25) **Пример.** Рассмотрим следующую импульсную характеристику:

$$L^c(t, s) = \begin{cases} ts & \text{для } t \geq s \geq 0, \\ 0 & \text{для } t \geq s \leq 0. \end{cases}$$

Соответствующее семейство $\{f_{\tau}^c: \tau \in J\}$ может быть реализовано канонической системой $\Sigma = (0, t, t)$ на интервале $J = (0, \infty)$. В то же время ни одна реализация этого семейства не может быть канонической на интервале $J' = (-\varepsilon, 0)$ ($\varepsilon > 0$, а в остальном произвольно), если не считать системы $(0, 0, 0)$. Это следует из того,

что, поскольку L^c тождественно равно нулю на $(J' \times J')^c$, в любой реализации положительной размерности каждое достижимое состояние должно быть ненаблюдаемым, а каждое наблюдаемое — недостижимым. Одновременно с этим, поскольку $L^c(t, \cdot) \neq 0$, на интервале $(0, \infty)$ не существует нульмерной реализации этого семейства.

(13.26) **Замечание.** Единственная возможность построения достаточно стройной теории реализации, не делающей специальных предположений относительно L^c , состоит в обобщении понятия динамической системы таким образом, чтобы *размерность* ее пространства состояний могла меняться во времени. Можно показать, что в общем случае такие системы нельзя описывать дифференциальными уравнениями, определенными на *всем* $T = \mathbb{R}$, даже если допустить использование обобщенных функций (дельта-функций) в качестве коэффициентов уравнения. Этот вопрос более глубоко рассматривается в работе Калмана [1969], хотя исследование соответствующих проблем далеко не закончено.

Для того чтобы понять, почему дифференциальное уравнение может не подойти в качестве канонической реализации *причинного* отображения вход — выход, заметим, что понятие причинности вносит асимметрию по отношению ко времени, никак не учитывающуюся в определении дифференциального уравнения. (Решения *обыкновенных* дифференциальных уравнений всегда существуют (если вообще существуют) в любом открытом интервале, содержащем начальный момент времени τ ; см. также замечания, следующие за теоремой (2.10) гл. 2.)

Эта нетривиальная ситуация вызвала много путаницы в литературе, вышедшей в свет в период с 1963 по 1967 г. Для того чтобы гарантировать существование канонических реализаций в классе гладких динамических систем, нам придется отказаться от требования причинности. В соответствии с первыми попытками в этом направлении (см. работу Вейсса и Калмана [1965]) примем следующие определения.

(13.27) **Определение.** *Весовой характеристикой* L называется произвольное непрерывное отображение

$$L: T \times T \rightarrow \{\text{матрицы размера } p \times m\}.$$

Весовой характеристикой L_Σ *конечномерной линейной гладкой динамической системы* Σ называется отображение

$$L_\Sigma: (t, s) \mapsto H_\Sigma(t) \Phi_\Sigma(t, s) G_\Sigma(s).$$

Реализацией *весовой характеристики* L называется любая линейная гладкая динамическая система Σ , такая, что $L_\Sigma = L$. (Глобально) *приведенной реализацией* *весовой характеристики* L назы-

вается реализация L минимальной размерности. (Если же у L нет конечномерной реализации, то все реализации считаются приведенными.)

Сразу отметим, что предложение (13.18) эквивалентно следующему.

(13.28) Предложение. *Весовые характеристики любых конечномерных линейных гладких динамических систем, алгебраически эквивалентных друг другу на T , одинаковы.*

Теперь мы докажем теорему, согласно которой конечномерные глобально приведенные реализации некоторой фиксированной весовой характеристики L принадлежат одному классу эквивалентности по отношению к алгебраической эквивалентности. Этот результат был сформулирован в работе Вейсса и Калмана [1965; на нижней половине стр. 155] и независимо доказан в работе Юла [1966]. В действительности он представляет собой лишь некоторую ослабленную модификацию теоремы (13.19). При этом центральную роль играет тот факт, что понятие глобальной приведенности оказывается эквивалентным понятию каноничности, а это в свою очередь является тривиальным следствием линейной независимости.

Для того чтобы поставить эту задачу в духе § 10.6, введем еще несколько понятий. Пусть $J \subset T$ есть произвольный конечный открытый промежуток, и пусть

$\Omega_J = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } u_J(\cdot): J \rightarrow \mathbb{R}^m\},$

$\Gamma_J = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } y_J(\cdot): J \rightarrow \mathbb{R}^p\}.$

Введем также еще одно определение, аналогичное определению (13.4), но суженное на множество моментов времени J .

(13.29) Определение. *Абстрактным линейным гладким отображением вход — выход в нулевом состоянии f_J^* на J называется линейное отображение*

$$\begin{aligned} f_J^*: \Omega_J &\rightarrow \Gamma_J, \\ &: u_J(\cdot) \mapsto y_J(\cdot): J \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ &: t \mapsto \int_J L(t, s) u_J(s) ds, \end{aligned}$$

в котором L — заданная весовая характеристика.

Реализацией отображения f_J^* считается любая линейная гладкая динамическая система Σ , такая, что $L_\Sigma = L$ на $J \times J$. Приведенной реализацией отображения f_J^* называется реализация минимальной размерности. Канонической реализацией отображения

f_J^* называется такая реализация, для которой при любом $r \in J$ (произвольном, но фиксированном) отображение

$$(13.30) \quad g_J^*: \Omega_J \rightarrow X_\Sigma: u_J(\cdot) \mapsto \int_J \Phi_\Sigma(r, s) G_\Sigma(s) u_J(s) ds$$

является сюръективным, а отображение

$$(13.31) \quad \begin{aligned} h_J^*: X_\Sigma &\rightarrow \Gamma_J, \\ : x &\mapsto y_J(\cdot): J \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ : t &\mapsto H_\Sigma(t) \Phi_\Sigma(t, r) x \end{aligned}$$

биективным.

Заметим, что $f_J^* = h_J^* \circ g_J^*$, а, согласно лемме (13.20), выбор r несуществен, что и позволило исключить r из обозначений.

Для того чтобы обобщить определение (13.29) на случай $J=T$, положим

$\Omega = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } u(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ с компактным носителем}\};$

$\Gamma = \{\text{векторное пространство всевозможных непрерывных функций } y(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^p\}.$

Тогда естественным обобщением определения (13.4) будет следующее.

(13.32) **Определение.** Абстрактным линейным гладким отображением вход — выход в нулевом состоянии f_T^* на T называется линейное отображение

$$f_T^*: \Omega \rightarrow \Gamma: u(\cdot) \mapsto \int_T L(\cdot, s) u(s) ds,$$

где L — заданная весовая характеристика.

Определения реализации, приведенной реализации и канонической реализации аналогичны соответствующим определениям для f_J^* .

Существование приведенных реализаций отображения f_J^* (или f_T^*) вытекает непосредственно из критерия существования (13.8). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять два отображения $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, таких, что уравнение (13.9) справедливо на $J \times J$ (или на $T \times T$), а целое число n минимально. Остается лишь выяснить, какова связь между минимальностью n в факторизации L и каноничностью факторизации отображения f_J^* (или f_T^*).

(13.33) **Лемма.** Пусть $\Sigma^0 = (0, G(\cdot) H(\cdot))$ — произвольная конечномерная приведенная и нормальная реализация отображения

f_J^* (или f_T^*). Тогда найдется такой конечный замкнутый интервал $I \subset J \subset T$, что столбцы $H(\cdot)$ и строки $G(\cdot)$ являются линейно независимыми функциями на I .

Доказательство. Шаг 1. Предположим, что столбцы $H(\cdot)$ линейно зависимы на некотором открытом интервале J (необязательно конечном). Тогда существует такое $x \neq 0$, что $H(t)x \equiv 0$ на J . Пусть C — произвольная невырожденная матрица, такая, что

$$(Cx)_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 1 \leq i < n, \\ 1 & \text{для } i = n. \end{cases}$$

(Например, C может быть подходящей перестановочной матрицей.) Тогда система

$$\tilde{\Sigma}^0 = (0, \tilde{G}(\cdot), \tilde{H}(\cdot)) = (0, CG(\cdot), H(\cdot)C^{-1})$$

является реализацией. Поскольку $\tilde{H}(\cdot)Cx = H(\cdot)x = 0$, последний столбец матрицы $\tilde{H}(\cdot)$ должен состоять на J из одних нулей. Поэтому, не нарушая условий реализации $L(\cdot, \cdot) = H(\cdot)G(\cdot) = \tilde{H}(\cdot)\tilde{G}(\cdot)$, можно отбросить и последнюю строчку матрицы $\tilde{G}(\cdot)$. Но в этом случае система $\tilde{\Sigma}^0$ не является минимальной реализацией, что противоречит условиям теоремы; итак, столбцы матрицы $H(\cdot)$ линейно независимы на J . Точно таким же образом доказать, что строки матрицы $G(\cdot)$ линейно независимы на J . При этом мы нигде не пользовались предположением о конечности J . Поэтому полученные утверждения остаются справедливыми и тогда, когда $J = T$.

Шаг 2. В соответствии с только что приведенным доказательством предположим, что столбцы матрицы $H(\cdot)$ линейно независимы на J . Обозначим через I_0 произвольный конечный замкнутый промежуток, содержащийся в J . Рассмотрим подпространство

$$X_0 = \{x: H(t)x = 0, t \in I_0\}.$$

Если $X_0 = 0$, то лемма доказана. Если же нет, то существует такое $t_1 \in J$, что $H(t_1)x_0 \neq 0$ при некотором $x_0 \neq 0$ из X_0 , как это следует из линейной независимости столбцов матрицы $H(\cdot)$ на J . Пусть тогда

$$X_1 = \{x: H(t)x = 0, t \in I_0 \cup I_1\},$$

где I_1 — произвольный конечный замкнутый интервал, содержащийся в J и содержащий t_1 . Тогда $\dim X_0 > \dim X_1$, так как X_1 не содержит луча, порожденного элементом x_0 . Но $\dim X_0 < \dim \Sigma^0 < \infty$ по определению реализации. Поэтому при некотором $k = q \leq 1 + \dim \Sigma^0$ имеем $\dim X_k = 0$. Таким образом, линейная независимость столбцов матрицы $H(\cdot)$ гарантируется не только на J , но и на конечном

объединении I' конечных замкнутых промежутков из J . Аналогичные рассуждения применимы и по отношению к строкам матрицы $G(\cdot)$ и дают нам некоторое конечное объединение I'' конечных замкнутых промежутков. В завершение доказательства остается лишь выбрать подходящий конечный интервал $I \subset J$, содержащий $I' \cup I''$ ¹⁾.

Отметим теперь одно очевидное утверждение.

(13.34) **Предложение.** Для любого абстрактного линейного гладкого отображения вход — выход в нулевом состоянии f_J^* (или f_T^*) понятия «каноническая реализация» и «приведенная реализация» совпадают.

С интуитивной точки зрения это означает, что в линейном случае условие минимальной размерности (приведенность) можно использовать вместо условия каноничности. Другими словами, это предложение обобщает утверждение (6.10).

Доказательство. С учетом леммы (13.20) без потери общности можно предположить, что реализация отображения f_J^* (или f_T^*) нормальна. Пусть такой реализацией является система

$$\Sigma^0 = (0, G(\cdot), H(\cdot)).$$

Докажем, что ее приведенность гарантирует и каноничность. Линейная независимость столбцов матрицы $H(\cdot)$ на $I \subset J$ (гарантированная леммой (13.33)) сразу свидетельствует о том, что отображение h_J^* , определенное в уравнении (13.31), является биективным. С другой стороны, если отображение g_J^* , определенное в уравнении (13.30), не является сюръективным, то найдется некоторый $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$, ортогональный области значений $g_J^* \subset \mathbb{R}^n$. Полагая тогда, что $u_J(\cdot): t \mapsto G'(t)x_0$, мы получаем, что

$$0 = \langle x_0, \int_I G(s) G'(s) x_0 ds \rangle = \int_I \|G'(s) x_0\|^2 ds.$$

Но отсюда имеем $G'(s)x_0 \equiv 0$ на J , что свидетельствует о линейной зависимости строк матрицы $G(\cdot)$ на $I \subset J$ в противоречии с выводами леммы (13.33). Аналогичные рассуждения можно использовать при рассмотрении отображения f_T^* , но в этом случае нужно определить $u(\cdot)$ как $u(\cdot): t \mapsto \theta(t) G'(t)x_0$, где $\theta: T \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \in C^0$, $\theta \neq 0$ на $\text{int } I$ и такая, что $\text{supp } \theta = I$. (В этом случае $u(\cdot) \in \Omega$, так как Ω содержит любые отображения $T \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компактным носителем.)

¹⁾ Заметим, что эта лемма играет такую же роль, как и соображения конечности на шаге 1 второго доказательства теоремы (11.14).

Строго обратными рассуждениями доказывается, что из каноничности следует приведенность.

Нам осталось только привлечь факт изоморфизма (6.8) канонических факторизаций линейных отображений, после чего непосредственно доказывается еще одна теорема единственности.

(13.35) **Вторая теорема единственности.** *Каждое абстрактное линейное гладкое отображение вход — выход в нулевом состоянии f_J (или f_T^*), для которого существует конечномерная реализация, имеет приведенную реализацию. Каждая приведенная реализация является и канонической. Приведенные реализации фиксированного отображения f_J (или f_T^*) принадлежат одному и тому же классу эквивалентности по отношению к алгебраической эквивалентности на J (или T).*

Короче говоря, приведенная реализация абстрактного отображения вход — выход является единственной с точностью до алгебраической эквивалентности.

Закончим этот параграф некоторыми соображениями о конструировании регуляторов, продолжающими тему § 2.6.

Воспользовавшись подходящим определением канонической реализации для общего случая как некоторой кусочно-гладкой динамической системы (см. Калман [1969]), мы можем сформулировать требуемую теорему.

(13.36) **Теорема единственности в причинном случае.** *Каноническая реализация семейства $\{f_\tau^c: \tau \in J, J \text{ есть произвольный открытый промежуток}\}$ причинных отображений вход — выход единственна с точностью до алгебраической эквивалентности на J ; такая система является одновременно полностью достижимой и полностью наблюдаемой.*

Однако отсюда еще не следует, что такая система ни полностью управляема, ни полностью идентифицируема при каждом $\tau \in J$.

(13.37) **Пример.** Пусть $g(\cdot) \in C^\infty$ и $g(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, причем $g(\cdot)$ не обращается в нуль на интервале $(-\infty, 0)$ и тождественно равна нулю на интервале $[0, +\infty)$. Пусть $h(t) = g(-t)$. Тогда причинная импульсная характеристика

$$L^c(t, s) = h(t) g(s), \quad t \geq s,$$

канонически реализуется системой

$$\Sigma = (0, g(\cdot), h(\cdot)).$$

Однако в этой системе ни одно состояние не является управляемым при $\tau \geq 0$, и ни одно состояние не является идентифицируемым при $\tau \leq 0$. Мы можем переформулировать это утверждение, сказав (см.

Вейсс, Калман [1965]), что *антипричинная импульсная характеристика* этой системы

$$L^a(t, s) = H_\Sigma(t) \Phi(t, s) G_\Sigma(s) = h(t) g(s) \text{ для } t \leq s$$

тождественно равна нулю.

Обращая направление времен, т. е. переходя к изучению антипричинных систем вместо причинных, мы получим следующее зеркальное отражение результата (13.36).

(13.38) *Теорема единственности для антипричинного случая. Каноническая реализация семейства $\{f_\tau^a: \tau \in J\}$ антипричинных отображений вход — выход является единственной с точностью до алгебраической эквивалентности на J ; такая система одновременно полностью управляема и полностью идентифицируема.*

Любая реализация Σ некоторого причинного импульсного отображения L^c определяет естественно и какое-то антипричинное импульсное отображение L_Σ^a , равное правой части выражения (13.7) на полуплоскости

$$(T \times T)^a = \{(t, s): t \leq s, t, s \in T\}.$$

Будем называть L_Σ^a *антипричинным продолжением* отображения L^c . Если Σ оказывается канонической реализацией отображения L^c на T , то, согласно первой теореме единственности, система Σ и ее отображение L_Σ^a единственны, как это и было в примере (13.37). Если Σ не является канонической реализацией своего собственного отображения L_Σ^a , то в общем случае системой Σ нельзя управлять и в ее пространстве состояний содержатся неидентифицируемые состояния. Но так как тем не менее система Σ единственна (а алгебраическая эквивалентность не сказывается на свойствах управляемости или идентифицируемости), мы все же можем решать задачу синтеза регулятора для некоторого подпространства $X_1 \subset X_\Sigma$. (Заметим, что X_1 теперь уже неоднозначно, так как $X_1 = \{\text{управляемые состояния}\} \cap \{\text{идентифицируемые состояния}\}$, а последнее подпространство зависит от выбора системы координат.)

Однако в наиболее общем случае ситуация существенно сложнее. Отображение L^c может иметь более чем одно антипричинное продолжение, и поэтому может оказаться, что невозможно надежным способом указать, какие состояния системы относятся к числу управляемых, а какие — к числу идентифицируемых, при условии, что система задается единственно своим причинным импульсным отображением. Такое положение вещей оставалось незамеченным в классической теории систем (с 1940 по 1960 г.), в которой понятие «системы» часто считалось синонимом преобразования входных воздействий в выходные величины. (Например, Задэ [1952]

встал на крайнюю в этом смысле точку зрения, которую нужно рассматривать в историческом плане.)

Подведем итог. Специалист по теории систем, собирающийся решать задачу конструирования регулятора, пользуясь одним лишь причинным импульсным отображением системы, стоит перед следующей ситуацией:

1. В каждый момент времени известно значение состояния системы в некоторой заданной системе внутренних координат. Это такое сильное предположение, что оно устраняет все теоретические трудности. Однако вероятность подобной ситуации на практике незначительно отличается от нуля.

2. Решение должно основываться на неполной информации о свойствах управляемости и идентифицируемости системы. Это исключительно сложная задача, и до сих пор ей уделялось мало внимания теорией.

3. Сделав специальные предположения о характере системы, можно по причинным ее свойствам однозначно выяснить ее антипричинные свойства, после чего систему можно эффективно описывать ее весовой характеристикой, и тогда применима вторая теорема единственности.

Предположение о стационарности системы относится к последней категории. И вообще, в настоящее время третий путь кажется наиболее плодотворным. Например, в последнее время удалось показать, что большинство результатов алгебраической теории из предыдущих параграфов применимы также и к аналитическим нестационарным системам (см. Калман [1969]; Хо, Калман [1970]).

10.A Обзор теории модулей

В этом приложении содержатся некоторые из основных фактов современной алгебры, к которым приходилось часто обращаться на протяжении всей этой главы. У читателя предполагается знакомство с элементарными понятиями алгебры, соответствующее уровню, например, книг Херстейна [1964] или Ху Сы-цзяна [1965]. Здесь же читатель найдет все определения и результаты, в явном виде не обсуждавшиеся в гл. 10.

Начнем с того, что напомним определение *кольца* R . Кольцом называется множество R с заданными на нем двумя ассоциативными законами композиции, первый из которых записывается аддитивно, а второй — мультипликативно, такими, что R образует абелеву группу относительно сложения и (не обязательно абелев) моноид относительно умножения¹⁾. Кроме того, необходимо, чтобы эти два закона композиции были взаимно согласованы в смысле выполнимости *аксиом дистрибутивности*:

$$(A. 1) \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

$$(A. 2) \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

при всех $\alpha, \beta, \gamma \in R$. В нетривиальных случаях, т. е. когда $R \neq \{0\}$ (где 0 есть нейтральный элемент относительно сложения, т. е. проще говоря, *нулевой* элемент множества R), имеем $1 \neq 0$ (где 1 есть нейтральный элемент относительно умножения, т. е., иначе говоря, *единичный* элемент множества R), и, следовательно, у 0 не может быть обратного относительно умножения элемента. Если для элемента $r \in R$ существует мультипликативно обратный, то r называют *единицей* кольца R . Если элементы r и s отличны от нуля кольца R и $rs = 0$, то r и s называются (соответственными) *делителями нуля*. Единица кольца R не может быть делителем нуля. Кольцо называется *коммутативным* тогда и только тогда, когда его закон умножения коммутативен. Коммутативное кольцо без делителей нуля называется *кольцом целостности*, *областью целост-*

¹⁾ Здесь нет смысла рассматривать кольца без единицы.

ности или просто областью. Если $R - \{0\}$ есть абелева группа относительно умножения, то R называется полем. Другими словами, поле есть коммутативное кольцо, в котором каждый элемент, кроме 0, является единицей. Всякое поле является областью.

(А.3) **Пример** (из § 17, 18 гл. 1 книги Зарисского и Самюэля [1958]). Рассмотрим множество всевозможных многочленов $\{\pi(z)\}$ независимой переменной z с коэффициентами, принадлежащими полю K . Другими словами, пусть

$$\pi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n, \quad \alpha_i \in K, \quad n < \infty.$$

Если $\alpha_n \neq 0$, то n называется степенью многочлена π . Определим сложение и умножение многочленов естественным образом:

$$\pi + \pi' = \pi'', \quad \text{где } \pi''(z) = \sum_k (\alpha_k + \alpha'_k) z^k;$$

$$\pi\pi' = \pi'', \quad \text{где } \pi''(z) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} \alpha_i \alpha'_j \right) z^k.$$

Тогда множество $\{\pi(z)\}$ есть кольцо и одновременно область. Это кольцо обозначим через $K[z]$. Единицами кольца $K[z]$ являются все многочлены степени 0 (их множество изоморфно K).

(А.4) **Пример** (из § 3 гл. VI книги Ленга [1965]). Формальным степенным рядом с коэффициентами из K и независимой переменной z называется бесконечная последовательность

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots),$$

которую можно формально представить в виде

$$\sum_0^{\infty} \alpha_i z^i.$$

Формальные степенные ряды образуют кольцо (обозначаемое через $K[[z]]$), если определить на нем умножение и сложение так же, как и в примере (А.3). Единицами $K[[z]]$ являются любые степенные ряды, у которых $\alpha_0 \neq 0$.

Вспомним еще определение абстрактного (левого) векторного пространства X над полем K , или просто K -векторного пространства. Этими терминами обозначается множество X , являющееся абелевой группой, и отображение (называемое скалярным умножением)

$$K \times X \rightarrow X: (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x,$$

такое, что для всех $\alpha, \beta \in K$ и всех $x, y \in X$ справедливы условия

$$(A.5) \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$(A.6) \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$(A.7) \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x),$$

$$(A.8) \quad 1 \cdot x = x.$$

Последняя аксиома играет роль условия нормировки. Множество n -ок $K = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in K$, с покомпонентным сложением и скалярным умножением является векторным пространством над K и всегда обозначается через K^n . Векторное пространство относится к категории *структур с операторами*. В них один объект (поле K) *действует* на другой (абелеву группу X). Элементы поля K называются *операторами* или *скалярами*. Заметим, что K можно рассматривать как векторное пространство над собой, поскольку аксиомы кольца гарантируют выполнение аксиом векторного пространства. Линейные отображения $f: X \rightarrow Y$ из одного K -векторного пространства X в другое Y мы часто называем *K -линейными отображениями* или *K -гомоморфизмами*, чтобы подчеркнуть характер используемого поля. В тех случаях, когда не возникает опасность путаницы, мы будем опускать точку в обозначениях скалярного умножения.

Понятие *R -модуля*¹⁾ есть обобщение понятия K -векторного пространства, в котором поле K заменяется на кольцо R , а в остальных аксиомы (A.5) — (A.8) сохраняют свое значение. В этом смысле понятие модуля более естественно, чем понятие векторного пространства, так как в аксиомах векторного поля используются лишь операции структуры кольца, а существование мультипликативно обратных не требуется. Отметим один интересный частный случай. Любое кольцо R является R -модулем над собой, если определить в нем скалярное произведение как произведение в структуре кольца. Отметим также, что K -модуль (где K — некоторое поле) есть векторное пространство. Поскольку нас будут интересовать лишь коммутативные кольца, здесь нет нужды различать левые и правые R -модули. Мы будем всегда записывать скалярное произведение слева.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ между R -модулями X и Y назовем *R -гомоморфизмом* (модулей) (или *R -линейным*) тогда и только тогда, когда

$$(A.9) \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in X;$$

$$(A.10) \quad f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x), \quad \alpha \in R, \quad x \in X.$$

¹⁾ Термин «модуль» (без упоминания кольца R) является устаревшим для обозначения «абелевой группы» с групповой операцией, обозначаемой символом $+$.

Это определение строго согласуется с обычным определением K -линейного отображения.

Назовем R -модуль X *конечным* или, точнее, *порождаемым конечным множеством образующих* $g_1 \in X, \dots, g_m \in X$ тогда и только тогда, когда каждый элемент множества X можно представить в виде

$$x = \sum_i r_i(x) \cdot g_i, \quad r_i \in R.$$

Коэффициенты $r_i(x)$, вообще говоря, неединственны. Если же они единственны для всех x , то R -модуль X называется *свободным*, а множество $\{g_1, \dots, g_m\}$ называется *базисом* модуля X . Другими словами, в свободном модуле

$$\text{из того, что } \sum_i r_i g_i = 0, \text{ следует, что } r_i \equiv 0.$$

Таким образом, свободный модуль почти в точности эквивалентен векторному пространству.

Если задан $K[z]$ -модуль X , то его можно автоматически рассматривать как K -векторное пространство, ограничив скаляры подполем $K^{(0)}[z]$ поля $K[z]$, образованным многочленами нулевой степени. Легко видеть, что $K^{(0)}[z] \approx K$.

(А.11) **Пример.** Множество $K^m[z]$ многочленных m -ок (т. е. m -мерных векторов с компонентами из кольца $K[z]$) представляет собой абелеву группу относительно покомпонентного сложения. На $K^m[z]$ можно задать и структуру K -векторного пространства, определив скалярное умножение в $K^m[z]$ следующим образом:

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \pi_1 \\ \vdots \\ \alpha \pi_m \end{bmatrix}, \quad \alpha \in K.$$

Более того, если заменить в этой формуле $\alpha \in K$ на $\pi \in K[z]$, то множество $K^m[z]$ становится $K[z]$ -модулем. В этом случае $K^m[z]$ оказывается свободным модулем с ровно m образующими: векторами e_1, \dots, e_m , где $e_k = (\delta_{ik})$.

Обычно мы пользуемся одной и той же буквой, скажем X , для того, чтобы обозначать: (1) множество, (2) абелеву группу, (3) векторное пространство и (4) модуль. Это не только удобно, но и показывает, что одно и то же множество в различных контекстах может наделяться различными структурами.

Приведем еще несколько фактов из теории колец и модулей.

Подмножество I кольца R называется (*левым*) *идеалом* тогда и только тогда, когда:

1) J устойчиво относительно сложения (т. е. $x, y \in J$ гарантирует, что $x + y \in J$; это можно также записать в виде $J + J \subset J$);

2) J устойчиво относительно умножения слева на элементы кольца R (т. е. из того, что $r \in R$, $s \in J$, следует, что $rs \in J$, что можно выразить также отношением $RJ \subset J$).

Правые идеалы и двусторонние идеалы определяются аналогичным образом. Но так как здесь нас интересуют лишь коммутативные кольца, эти различия несущественны и все идеалы могут записываться как левые.

Пересечение идеалов (как множеств) является идеалом. Идеалом, порожденным множеством $A = \{r_1, \dots, r_q\}$, называется пересечение всех идеалов, содержащих A . Идеал J , порожденный одним элементом r из R , называется *главным*. В этом случае можно написать, что $J = Rr$ (в тех случаях, когда характер кольца R ясен, J обозначают через (r)). Если каждый идеал кольца R является главным, то R называют *кольцом главных идеалов*. Кольцо главных идеалов, являющееся одновременно областью, можно называть *областью главных идеалов*.

Подмодулем Y R -модуля X называется подгруппа \dot{X} , устойчивая относительно скалярного умножения (из того, что $r \in R$ и $y \in Y$, следует, что $ry \in Y$ или $RY \subset Y$). Последнее обозначение сразу показывает, что J является идеалом кольца R тогда и только тогда, когда J есть подмодуль модуля R , рассматриваемого как модуль над собой.

Пусть R — некоторое коммутативное кольцо, а J — один из его идеалов. Семейство множеств $\{r + J : r \in R\}$ называется *классами вычетов кольца R относительно J* . Приведенное обозначение неоднозначно: классы вычетов $r + J$ и $r' + J$ совпадают тогда и только тогда, когда $r - r' \in J$. Классы вычетов образуют кольцо R/J и $R - J$, называемое *кольцом классов вычетов*, или *факторкольцом*, или *кольцом разностей*. В этом кольце операции сложения и умножения определяются «естественным» образом:

$$(r + J) + (s + J) = (r + s + J),$$

$$(r + J)(s + J) = (rs + J).$$

Но так как используемая система обозначений неоднозначна, не очевидно, что выписанные соотношения вполне определены. Возможность такого определения *следует* из свойств (двусторонних) идеалов. Читателю придется самому заняться соответствующей проверкой.

В кольце R/J мы иногда записываем равенства в виде

$$a = b(J) \text{ или } a = b \bmod J,$$

что должно означать, что $a - b \in J$. Если идеал J главный, $J = Rq$, то предыдущие соотношения можно переписать в виде

$$a = b \bmod q$$

(что читается: a равно b по модулю q).

(А.12) **Пример.** Кольцо $K[z]$ есть область главных идеалов. Этот факт легко доказывается с помощью алгоритма Евклида для многочленов с учетом того, что их коэффициенты принадлежат полю.

(А.13) **Пример.** Произвольный многочлен $\chi \in K[z]$ порождает соответствующее факторкольцо $K[z]/K[z]\chi$. Это кольцо (как множество) изоморфно множеству всех многочленов степени, меньшей $\deg \chi$, так как в классе вычетов $\theta + K[z]\chi$ для любого многочлена $\theta \in K[z]$ всегда найдется единственный многочлен $\bar{\theta}$, имеющий такую же (минимальную) степень. Другими словами, каждое $\theta \in K[z]$ имеет однозначное представление

$$\theta = \bar{\theta} + \rho_\theta \chi, \quad \deg \bar{\theta} < \deg \chi, \quad \rho_\theta \in K[z].$$

Таким образом, многочлены $\{\bar{\theta}\}$ изоморфны (как множества) множеству классов вычетов $\{\theta + K[z]\chi\}$ и $\bar{\theta}$ можно рассматривать в качестве «канонического» представителя класса вычетов $\theta + K[z]\chi$. Множество $\{\bar{\theta}\}$ можно наделить структурой кольца. Для этого сложение можно определить, как и для обычных многочленов, а умножение определить следующим соотношением: $\bar{\theta} \cdot \bar{\psi} = \widetilde{\theta\psi}$. Читается это так: «Нужно перемножить $\bar{\theta}$ и $\bar{\psi}$ как обычные многочлены, а затем в классе вычетов $\bar{\theta}\bar{\psi} + K[z]\chi$ найти элемент наименьшей степени». Кольцо $K[z]/K[z]\chi$ очевидно изоморфно кольцу $\{\bar{\theta}\}$. Очень часто кольцо $K[z]/K[z]\chi$ удобнее представлять себе как $\{\bar{\theta}\}$, так как для последнего кольца операция умножения проще. Таким отождествлением пользуются очень часто, чаще всего даже не оговаривая его специально. Множество $\{\bar{\theta}\}$ обычно называют *кольцом классов вычетов (относительно χ или по модулю χ)*.

Кольцо $\{\bar{\theta}\} \approx K[z]/K[z]\chi$ необязательно является областью. В нем могут существовать делители нуля, которыми служат как раз многочлены, имеющие множитель, общий с χ . Действительно, если $\alpha, \psi, \chi, \chi/\alpha \in K[z]$ и $\theta = (\chi/\alpha)\psi$, то $\alpha\theta = \psi\chi = 0 \bmod \chi$.

В кольце $K[z]$ единственными единицами являются отличные от нуля многочлены степени 0. В кольце же $K[z]/K[z]\chi$ единицами служат все многочлены, взаимно простые с χ . Действительно, если θ и χ взаимно просты, то с помощью алгоритма Евклида можно показать, что $1 = \alpha\theta + \beta\chi$, где $\alpha, \beta \in K[z]$; следовательно, имеем $\alpha\theta \equiv 1 \bmod \chi$, откуда находим $\theta^{-1} = \alpha \bmod \chi$.

Тем самым мы доказали следующую фундаментальную теорему.

(A.14) **Предложение.** Пусть χ есть произвольный элемент кольца $K[z]$. Тогда каждый элемент кольца $K[z]/K[z]\chi$ является либо единицей, либо делителем нуля.

Многочлен $\pi \in K[z]$ называется *неприводимым* (или *простым*) тогда и только тогда, когда для него не существует факторизации $\pi = \rho\sigma$, где $\rho, \sigma \in K[z]$, а ρ и σ не являются единицами кольца $K[z]$ (т. е. $\rho, \sigma \notin K$). С помощью этого определения и предложения (A.14) просто доказать следующее предложение.

(A.15) **Предложение.** Если элемент $\chi \in K[z]$ неприводим, то кольцо $K[z]/K[z]\chi$ является полем. Другими словами, если $K[z]/K[z]\chi$ является кольцом целостности, то оно одновременно есть и поле.

(A.16) **Упражнение.** Покажите, что $Z[z]$ не является областью главных идеалов. (Указание: рассмотрите идеал, порожденный (q, z) , $q > 1$.)

Наиболее важным результатом теории областей главных идеалов (и, в частности, $K[z]$) является следующая теорема.

(A.17) **Теорема об инвариантах.** Пусть R есть область главных идеалов, а Π есть произвольная матрица размера $p \times t$ с элементами из R . Тогда Π можно представить в виде

$$\Pi = A\Lambda B,$$

где:

(а) A — матрица размера $p \times p$ с элементами из R и такая, что $\det A$ есть единица в R (это означает, что A является единицей кольца матриц размера $p \times p$ над R).

(б) B — матрица размера $t \times t$ с элементами из R и такая, что $\det B$ есть единица в R .

(с) Λ — матрица размера $p \times t$, все элементы которой равны нулю, кроме тех, которые находятся на главной диагонали и которые равны $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$, причем справедливы следующие отношения делимости: $\lambda_i | \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$. Элементы λ_i однозначно определяются матрицей Π с точностью до единиц в R . Они называются инвариантами матрицы Π . Целое число r определяет ранг матрицы Π .

(д) Инварианты λ_i можно вычислять непосредственно по формулам $\lambda_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$, где $\Delta_0 = 1$, а Δ_i есть наибольший общий делитель всех миноров матрицы Π размера $i \times i$.

(е) В общем случае матрицы A и B неединственны.

Доказательство этой теоремы базируется на одном классическом алгоритме сведения матрицы Π к Λ с помощью элементарных матричных операций. Этот процесс мы будем называть алгоритмом вычисления инвариантных множителей. Исчерпывающие доказательства теоремы можно найти в книгах Гантмахера [1953, гл. VI]

и Альберта [1956, гл. III]. Более сжатые доказательства приводятся в литературе, указанной в § 10.8 после теоремы (8.1), которая представляет собой перефразировку теоремы (A.17) в рамках теории модулей. Впервые эта теорема была использована в прикладных целях Фрээрером, Дунканом и Колларом [1946] в их исследовании задач теории вибрации из области аэронавтики. В этой работе много интересных примеров. Близкие вопросы рассматриваются также в работе Калмана [1965a].

Если $R = K$, где K есть некоторое поле, то все λ_i можно положить равными 1, так как каждый элемент поля, кроме нуля, является единицей и теорема (A.17) сводится к определению алгоритма нахождения ранга r K -матрицы Π . Этот ранг является инвариантом произвольного K -гомоморфизма $X \rightarrow Y$ относительно изменений базисов K -векторных пространств X и Y . В общем случае можно говорить, что Π эквивалентно Λ , и писать это в виде $\Pi \sim \Lambda$.

10.В Частичная реализация отображения вход — выход (в скалярном случае)

Продолжая наше обсуждение вопроса частичной реализации (см. теорему (11.32)), мы приведем здесь подробное решение задачи существования, единственности и вычисления минимальной частичной реализации для специального случая, когда $m = p = 1$. Общий случай рассматривается в работе Калмана [1970].

(B.1) Теорема. Пусть $\{A_1, A_2, \dots\}$ — произвольная бесконечная последовательность элементов из некоторого фиксированного поля K , и пусть \mathcal{H} — соответствующая ганкелева матрица. Тогда для каждого фиксированного N_0 возможен один из следующих случаев:

(а) Минимальная частичная реализация единственна (т. е. определяет единственный класс эквивалентности относительно изоморфизма систем).

(б) Условия задачи чрезмерны, т. е. минимальная частичная реализация порядка N_0 единственна и в то же время является единственной минимальной частичной реализацией порядка M_0 , где $M_0 < N_0$.

(с) Условия задачи недостаточны, т. е. найдется такое целое $P_0 > N_0$, что каждая минимальная частичная реализация порядка N_0 в то же время является и единственной минимальной частичной реализацией порядка P_0 для некоторого произвольного продолжения $B_{N_0+1}, \dots, B_{P_0}$ заданной последовательности. Короче говоря, в этом случае имеется $(P_0 - N_0)$ -параметрическое семейство минимальных реализаций.

Случай (а) возможен тогда и только тогда, когда $N_0 = 2n$ и

$$\text{rank } \mathcal{H}_{nn} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n} = n.$$

Случай (b) возможен тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } \mathcal{H}_{nn'} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n'} = n' - q,$$

где $q > 0$ и $n' = n$ [$n' = n + 1$], если $N_0 = 2n$ [$N_0 = 2n + 1$]. При этом $M_0 = 2(n - q)$.

Случай (c) возможен тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathcal{H}_{nn'} &= n' - q, \\ \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n'} &= n' - q + 1, \end{aligned}$$

где $q > 0$ и $n' = n$ [$n + 1$], если $N_0 = 2n$ [$N_0 = 2n + 1$]. При этом $P_0 = 2(n + q)$.

Во всех случаях формулы (11.16) — (11.18), в которых $r = n$, а M_0 и P_0 определены соответственно, определяют минимальную частичную реализацию порядка N_0 , причем в случае (c) это утверждение нужно понимать в том смысле, что к последовательности A_1, \dots, A_{N_0} необходимо предварительно добавить $(P_0 - N_0)$ произвольных параметров $B_{N_0+1}, \dots, B_{P_0}$. Размерность минимальной частичной реализации равна соответственно n , $n - q$ и $n + q$.

Доказательство. Учитывая утверждения теоремы, рассмотрим прежде всего случай $N_0 = 2n$. (Основная причина этого заключается в необходимости определить $2n$ коэффициентов передаточной функции искомой n -мерной реализации $\hat{\Sigma}$. Короче говоря, число неизвестных всегда должно быть четным.)

Случай (a). В этом случае матрица \mathcal{H}_{nn} имеет полный ранг, так что условие (11.32b) тривиально выполняется. (Отметим, что в частном случае $p = m = 1$ матрица $\mathcal{H}_{n+1, n}$ является транспонированной матрицей относительно $\mathcal{H}_{n, n+1}$.) Для того чтобы доказать единственность, предположим, что существуют две минимальные частичные реализации Σ и $\hat{\Sigma}$ с соответствующими последовательностями $\{B_i\}$ и $\{\hat{B}_i\}$, такими, что

$$\begin{aligned} A_i &= B_i = \hat{B}_i, & i &= 1, \dots, N_0; \\ B_i &= \hat{B}_i, & i &= N_0 + 1, \dots, N; \\ B_{N+1} &\neq \hat{B}_{N+1}. \end{aligned}$$

Согласно лемме (11.12), обе матрицы

$$(B.2) \quad \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n & A_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_n & \dots & A_{2n-1} & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{N-n+1} & \dots & B_N & B_{N+1} \end{bmatrix}$$

и

$$(B.3) \quad \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n & A_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_n & \dots & A_{2n-1} & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{N-n+1} & \dots & B_N & \hat{B}_{N+1} \end{bmatrix}$$

имеют ранг n . Но по условиям теоремы подматрица \mathcal{H}_{nn} порядка $n \times n$ матрицы (B.2), расположенная в верхнем левом углу, имеет ранг n . Поэтому n -мерный вектор (B_{N-n+1}, \dots, B_N) должен быть линейно зависимым от строк матрицы \mathcal{H}_{nn} , а так как ранг матрицы (B.2) равен n , матрица B_{N+1} однозначно определяется этой линейной зависимостью. Но тогда $\hat{B}_{N+1} = B_{N+1}$, поскольку в противном случае ранг матрицы (B.3) должен бы быть равным $n + 1$.

Случай (b). Предположим, что $\text{rank } \mathcal{H}_{nn} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n} = n - q$, $q > 0$. Согласно теореме (11.32), в этом случае существует реализация Σ размерности $(n - q)$, определяемая формулами (11.16) — (11.18), в которых нужно положить $r = n$. В соответствии с леммой (11.12) эта реализация безусловно минимальна. Поскольку система Σ является $(n - q)$ -мерной, степень ее минимального многочлена не может быть выше $(n - q)$. В связи с этим систему Σ можно рассчитать так же, положив в формулах (11.16) — (11.18) $r = n - q$. Отсюда следует, что Σ полностью определена частичной последовательностью порядка $M_0 = 2(n - q)$. С другой стороны, если $r < n - q$, а $s \leq n - q$, то $\text{rank } \mathcal{H}_{rs} < n - q$, так что построить частичную реализацию порядка N_0 , используя частичную последовательность порядка меньше M_0 , невозможно. Единственность Σ доказывается так же, как и для случая (a).

Случай (c). Предположим, что

$$\text{rank } \mathcal{H}_{nn} = n - q < \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n} = n - q + 1, \quad q > 0.$$

Тогда последняя строка матрицы $\mathcal{H}_{n+1, n}$ линейно независима от n предыдущих строк. Таким образом, последняя строка матрицы $\mathcal{H}_{n+1, n}$ линейно независима от предыдущих n строк длины $(n + 1)$ независимо от значения элемента A_{2n+1} . Но это значит, что $\text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n+1} = n - q + 2$ при любых продолжениях частичной последовательности $\{A_1, \dots, A_{2n}\}$ до $\{A_1, \dots, A_{2n+1}\}$, и мы получаем новую оценку снизу для минимальной частичной реализации порядка $2n$.

Предположим теперь, что найдутся такие числа A_{2n+1} и A_{2n+2} , что

$$\text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n+1} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+2, n+1} = n - q + 2.$$

Это означает, что некоторые частичные последовательности порядка $2(n+1)$, согласующиеся с исходной последовательностью вплоть до члена A_{2n} включительно, имеют реализацию Σ размерности $(n-q+2)$. Если $q \geq 1$, то отсюда следует, что минимальный многочлен системы Σ имеет степень не более n , т. е. систему Σ можно рассчитать по формулам (11.16) — (11.18) для $r = n$ и $\dim \Sigma = \text{rank } \mathcal{H}_{nn}$. Но $\text{rank } \mathcal{H}_{nn} = n - q < n - q + 2$. Этим доказано, что для любых продолжений частичной последовательности $\{A_1, \dots, A_{2n}\}$ до $\{A_1, \dots, A_{2n+2}\}$ справедливы соотношения

$$\text{rank } \mathcal{H}_{n+1, n+1} = n - q + 2 < \text{rank } \mathcal{H}_{n+2, n+1} = n - q + 3.$$

Мы свели, таким образом, случай (с) к новому, где $N'_0 = 2n + 2$ и $q' = q - 1$, $q > 0$. Для завершения доказательства остается лишь воспользоваться принципом конечной индукции.

Доказательство для случая $N_0 = 2n + 1$ сводится к случаю $N_0 = 2n$ с помощью очевидных рассуждений, аналогичных использованным выше.

С учетом предложения (11.35) наша задача теории систем «построения минимальной частичной реализации порядка N_0 последовательности $\{A_1, A_2, \dots\}$ с элементами из K » эквивалентна следующей задаче теории функций.

(В.4) **Задача** (об аппроксимациях Падэ). Найти два многочлена $\sigma, \chi \in K[z]$, $\deg \sigma < \deg \chi$, таких, чтобы коэффициенты формального степенного ряда

$$\frac{\sigma(z)}{\chi(z)} = B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots$$

были согласованы с заданной последовательностью $\{A_1, A_2, \dots\}$ вплоть до N_0 -го члена включительно, причем $\deg \chi$ должна быть минимальной.

Приведенные выше результаты можно перевести на язык этой новой задачи следующим образом.

(В.5) **Теорема.** Пусть $N = 2n$ или $2n + 1$. Тогда решение задачи (В.4) находится по формуле

$$\frac{\sigma(z)}{\chi(z)} = H(zI - F)^{-1} G,$$

где F , G и H вычисляются по формулам (11.16) — (11.18), $\deg \chi = n + q$, а «дефект» равен

$$q = \begin{cases} N_0 - n - \text{rank } \mathcal{H}_{n, N_0-n}, & \text{если } \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, N_0-n} > \text{rank } \mathcal{H}_{n, N_0-n}, \\ \text{rank } \mathcal{H}_{n, N_0-n} - n, & \text{если } \text{rank } \mathcal{H}_{n+1, N_0-n} = \text{rank } \mathcal{H}_{n, N_0-n}. \end{cases}$$

(В.6) **Историческое замечание.** Основные результаты для задачи (В.4) были получены Коши и Якоби (см. обзор классических

результатов и особенно замкнутых формул, описывающих σ и χ через определители в работе Фробениуса [1881]). Но для многих целей формулы (11.16) — (11.18) Б. Л. Хо удобнее определителей Якоби и Фробениуса. Еще важнее, возможно, то, что классические результаты, видимо, никогда не обобщались на случай матричных последовательностей или числовых последовательностей, не принадлежащих полю. Напротив, наши методы охватывают, по сути дела, обе возможности обобщения, что связано с важными практическими последствиями в теории вычислительных систем и теории систем (см. Калман [1968]).

10.C Первое доказательство теоремы единственности канонических реализаций

Мы воспроизводим здесь с некоторыми улучшениями редакционного характера первоначальное доказательство теоремы (13.19) (полученное весной 1962 г. автором и ранее не публиковавшееся). Его основные идеи очень близки тем, которыми впоследствии (но независимо) воспользовался Юла [1966].

Для доказательства потребуется несколько небольших лемм. Мы докажем их без обычных формальностей, прямо по ходу доказательства теоремы.

Предположим, что $J = (a, b)$, где a обязательно конечно, но b может быть и $+\infty$. Напомним, что Σ и $\hat{\Sigma}$ определены на всем $T = \mathbb{R} \supset J$.

Возьмем любое $\tau \in J$. По определению реализации

$$H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) = H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, s) G_{\Sigma}(s)$$

при всех t и s , таких, что $s \leq \tau \leq t$. Согласно полугрупповому свойству переходных отображений (см. уравнение (2.21) в гл. 2), это соотношение эквивалентно следующему:

$$(C.1) \quad H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) = H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, \tau) \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s).$$

Отметим, что мы не делаем при этом предположения (а на самом деле мы пока еще этого и не знаем), что $n = \dim \Sigma = \hat{n} = \dim \hat{\Sigma}$.

В силу полной достижимости Σ на J в точке τ найдется такое $\tau' < \tau$, что матрица

$$(C.2) \quad \int_{\tau'}^{\tau} \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) G'_{\Sigma}(s) \Phi'_{\Sigma}(\tau, s) ds$$

положительно определена (теорема (2.24) гл. 2). Таким образом, равенство (C.1) гарантирует, что

$$(C.3) \quad H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) A(\tau; \tau') = H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, \tau)$$

при всех $t \geq \tau$, где

$$A(\tau; \tau') = \int_{\tau'}^{\tau} \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) G'_{\hat{\Sigma}}(s) \Phi'_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) ds \times \\ \times \left[\int_{\tau'}^{\tau} \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) G'_{\Sigma}(s) \Phi'_{\Sigma}(\tau, s) ds \right]^{-1}$$

Подставляем выражение (С.3) в (С.1):

$$(C.4) \quad H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) [A(\tau; \tau') \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) - \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G_{\hat{\Sigma}}(s)] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю при любых $s \leq \tau$. Действительно, в противном случае всегда нашлось бы такое $x \neq 0$, что имело место

$$H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) x = 0 \text{ для всех } t \geq \tau.$$

Но это невозможно, так как система $\hat{\Sigma}$ полностью наблюдаема в момент времени τ . Таким образом, при всех $s \leq \tau$ имеем

$$(C.5) \quad \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) = A(\tau; \tau') \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s).$$

Поменяв ролями системы Σ и $\hat{\Sigma}$ (и используя тот факт, что система $\hat{\Sigma}$ полностью достижима в момент времени τ , а Σ в этот же момент времени полностью наблюдаема), мы получим еще два соотношения, аналогичных уравнениям (С.3) и (С.5):

$$(C.6) \quad H_{\Sigma}(t) \Phi_{\Sigma}(t, \tau) B(\tau; \tau'') = H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) \text{ для всех } t \geq \tau$$

и

$$(C.7) \quad \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) = B(\tau; \tau'') \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) \text{ для всех } s \leq \tau,$$

где

$$B(\tau; \tau'') = \int_{\tau''}^{\tau} \Phi_{\Sigma}(\tau, s) G_{\Sigma}(s) G'_{\hat{\Sigma}}(s) \Phi'_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) ds \times \\ \times \left[\int_{\tau''}^{\tau} \Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) G'_{\hat{\Sigma}}(s) G'_{\hat{\Sigma}}(s) \Phi'_{\hat{\Sigma}}(\tau, s) ds \right]^{-1}.$$

Теперь легко доказать, что матрицы A и B не вырождены, а на самом деле являются обратными по отношению друг к другу. Например, подставим уравнение (С.3) в уравнение (С.6). Тогда

$$H_{\hat{\Sigma}}(t) \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, \tau) [A(\tau; \tau') B(\tau; \tau'') - I] = 0,$$

а из полной наблюдаемости $\hat{\Sigma}$ в момент времени τ сразу следует в том же смысле, что и раньше, что выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю. Но это показывает, что матрица B

является правой обратной по отношению к матрице A (и что A есть левая обратная для B) и, в частности, что $\hat{n} \leq n$. Но из соображений симметрии ясно, что $n \leq \hat{n}$ и, следовательно, $n = \hat{n}$, и наше утверждение оправдано.

Все предыдущие рассуждения сохраняют свою силу и при замене τ' или τ'' на некоторое меньшее число τ''' . Более того, если $\tau_1 < \tau_2$, то всегда можно выбрать $\tau'_1 < \tau'_2$. (Доказательство: рассмотрим матрицу (С.2) и заметим, что ее ранг не убывает с убыванием нижнего предела интегрирования.) Поэтому τ' и τ'' можно заменить на единственное $\tau''' = \min\{\tau'(a), \tau''(a)\} = c$, и такой выбор возможен для любых $\tau \in J$. Будем теперь для простоты писать $A(\tau)$ вместо $A(\tau; c)$ и $A^{-1}(\tau)$ вместо $B(\tau; c)$.

Выберем затем произвольно $\sigma \in J$, такое, что $\sigma < \tau$. Перепишем уравнение (С.5) в виде

$$\Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, \sigma) \Phi_{\hat{\Sigma}}(\sigma, s) G_{\hat{\Sigma}}(s) = A(\tau) \Phi_{\Sigma}(\tau, \sigma) \Phi_{\Sigma}(\sigma, s) G_{\Sigma}(s).$$

Полная достижимость системы $\hat{\Sigma}$ в момент времени τ требует, чтобы

$$\Phi_{\hat{\Sigma}}(\tau, \sigma) = A(\tau) \Phi_{\Sigma}(\tau, \sigma) A^{-1}(\sigma), \quad \tau > \sigma, \quad \tau, \sigma \in J$$

(как и раньше, мы умножаем соответствующее выражение на $G_{\hat{\Sigma}}(s) \Phi_{\hat{\Sigma}}(\sigma, s)$ справа и интегрируем произведение по s). Но если $t, s \in J$, $r \in J$ и $t, s \geq r$, то

$$\begin{aligned} \text{(С. 8)} \quad \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, s) &= \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, r) \Phi_{\hat{\Sigma}}^{-1}(s, r) = \\ &= A(t) \Phi_{\Sigma}(t, r) A^{-1}(r) [A(s) \Phi_{\Sigma}(s, r) A^{-1}(r)]^{-1} = \\ &= A(t) \Phi_{\Sigma}(t, r) \Phi_{\Sigma}^{-1}(s, r) A^{-1}(s) = \\ &= A(t) \Phi_{\Sigma}(t, s) A^{-1}(s), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение (13.15а). Объединяя этот результат с уравнениями (С.3) и (С.5) и используя невырожденность Φ , получаем, что

$$H_{\hat{\Sigma}}(t) A(t) = H_{\Sigma}(t), \quad t \in J,$$

а также

$$G_{\hat{\Sigma}}(t) = A(t) G_{\Sigma}(t), \quad t \in J,$$

что доказывает утверждения (13.15с) и (13.15d).

Итак, мы убедились в справедливости трех из четырех соотношений теоремы (13.15). Остается лишь доказать, что отображение $A(\cdot): J \rightarrow \{\text{матрицы размера } n \times n\}$ принадлежит классу C^1 . Это можно сделать, продифференцировав $A(\tau; a)$ впрямую. Однако нижеследующее доказательство более содержательно.

Рассмотрим сначала частный случай, когда $F_{\Sigma}(\cdot) = F_{\hat{\Sigma}}(\cdot) = 0$, так что $\Phi_{\Sigma}(t, s) = \Phi_{\hat{\Sigma}}(t, s) = I$ при всех t и s . Тогда уравнение (С.8) показывает, что $A(\cdot)$ постоянно на J и, значит, наверняка принадлежит классу C^1 . Но так как отношение алгебраической эквивалентности транзитивно, доказательство справедливости этого последнего утверждения теоремы (13.15) сводится к только что исследованному частному случаю с помощью леммы (13.20).

Итак, мы доказали теорему для случая, когда левый предел a интервала J не был $-\infty$. Если же это именно так, то можно рассмотреть вложенную последовательность множеств $J_{k+1} \supset J_k$, где

$$J_k = (a_k, b), \quad a_k \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

А так как предыдущие результаты справедливы при любых k , то они справедливы и для $J = (-\infty, b)$ или $(-\infty, \infty)$.

Это замечание завершает доказательство теоремы единственности.

10.D Указатель обозначений

Общие обозначения

J — промежуток из множества \mathbf{R} (точное определение приводится в каждом конкретном случае)

K — произвольное поле

R — произвольное кольцо

\mathbf{C} — множество комплексных чисел

\mathbf{R} — множество вещественных чисел

\mathbf{Z} — множество рациональных чисел

\rightarrow — отображение (множество \rightarrow множество)

\mapsto — отображение (элемент \mapsto элемент)

\cong — изоморфизм

\oplus — прямая сумма

(a, b) — наибольший общий делитель ($a, b \in R$, где R есть кольцо)

$a|b$ — a делит b

$a \nmid b$ — a не делит b

Специальные обозначения

e_k — стандартный векторный базис пространства K^m

f, f_{τ}, f_I — отображения «вход — выход»

g — образующая модуля

g_k — достижимые образующие модуля

$A, A(t), \alpha$ — изоморфизм пространства состояний

273

272

297

282

271

A_Y — аннулятор подмножества Y некоторого модуля	297
$\{A_1, A_2, \dots\}$ — бесконечная матричная последовательность, индуцируемая отображением f	326
E_n^m — «редактирующая» матрица	328
F, F_Σ — одношаговое переходное отображение или матрица (Σ) в пространстве состояний	270
G, G_Σ, G_f — входное отображение или матрица (Σ или f)	270
$\bar{G}, \bar{G}_\Sigma, \bar{G}_f$ — отображение мгновенного значения входного воздействия в мгновенное состояние	284
H, H_Σ, H_f — выходное отображение или матрица (Σ или f)	270
$\bar{H}, \bar{H}_\Sigma, \bar{H}_f$ — отображение состояния в мгновенное значение выходных величин	285
K^n — векторное пространство n -ок, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in K$	269
$K[z]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из K и независимой переменной z	276
$K^n[z]$ — K -векторное пространство n -мерных векторных многочленов	276
$K[[z]]$ — K -векторное пространство формальных степенных рядов с коэффициентами из K и независимой переменной z	277
$K^n[[z]]$ — K -векторное пространство формальных степенных рядов с n -мерными векторными коэффициентами	277
L, L_Σ — весовая характеристика (Σ)	361
L^c, L^a — причинное (антипричинное) импульсное отображение	354
T — множество моментов времени	269
$u_\tau(\cdot), u_f(\cdot), u(\cdot)$ — входные воздействия	354
$y_\tau(\cdot), y_f(\cdot), y(\cdot)$ — выходные величины	354
U — множество входных значений (алфавит)	269
W, W_f, W_Σ — передаточные матрицы	308
X, X_Σ, X_f — множество, пространство, модуль (Σ или f)	281
Y — множество значений выходных величин (выходной алфавит)	269
γ — выходная последовательность	272
λ_i — инварианты многочленной матрицы	314
π, ν_k, ω_k — многочлены $\in K[z]$	276
$\sigma, \sigma_\Omega, \sigma_\Gamma$ — операторы сдвига (в Ω , в Γ)	274
τ — текущий момент времени	354

φ — отображение перехода	269
χ, χ_F — характеристический многочлен (матрицы F)	302
$\psi, \psi_X, \psi_F, \psi_\Sigma$ — минимальные многочлены (модуля X , матрицы F , системы Σ)	297
ψ_k — инварианты (модуля X или матрицы F)	304
ω — входная последовательность	272
Γ, Γ_τ — пространство выходных величин	269
$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)$, где λ_i — инварианты многочленной матрицы	314
Σ — линейная динамическая система	267
Ω, Ω_τ — пространство входных воздействий	269
\mathcal{P}_n — K -векторное пространство многочленов $\pi \in K[z]$, для которых $\deg \pi < n$	298
$\mathcal{H}(f)$ — бесконечная ганкелева матрица (f)	326
$\mathcal{H}_{m,n}(f)$ — бесконечная ганкелева матрица (f) из блочных матриц размера $m \times n$	326
\deg — степень (векторного) многочлена	280
d — степень формального многочлена	348
E_f — отношение эквивалентности Нерода, индуцируемое отображением f	280
\approx_f — отношение эквивалентности модулей от- носительно f	280
\equiv_f — отношение эквивалентности Майхилла, индуцируемое отображением f	348
$(\omega)_f$ — класс эквивалентности Нерода	280
$[\omega]_f$ — класс эквивалентности модулей	280
$\{\omega\}_f$ — класс эквивалентности Майхилла	348
<ul style="list-style-type: none"> \circ — в выражениях вида $\omega \circ v$ — операция сшивания входных воздействий, а в выражениях вида $x \circ \omega$ — действие ω на x 	280
\sim — канонический представитель класса вычетов по $\text{mod } \varphi$	298

ЛИТЕРАТУРА

- Альберт (Albert A. A.)
 [1956] Fundamental Concepts of Higher Algebra, University of Chicago Press (modern paperback reprint in Phoenix Science Series).
- Андрэ (Andrée R. V.)
 [1949] Computation of the inverse of a matrix, *Am. Math. Monthly*, 58 : 87—92.
- Арбиб (Arbib M. A.)
 [1964] Brains, Machines, and Mathematics, McGraw-Hill. (Есть русский перевод: Мозг, машина и математика, «Наука», М., 1968.)
 [1965] A common framework for automata theory and control theory, *SIAM J. Contr.*, 3 : 206—222.
 [1966] Automata theory and control theory: a rapprochement, *Automatica*, 3 : 161—189.
 [1967] Tolerance automata, *Kybernetik*, 3 : 223—233.
 [1968a] (ed.) The Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups, Academic Press.
 [1968b] Automaton decomposition and semigroup extensions, chap. 3 of [Arbib, 1968a].
 [1969] Theories of Abstract Automata, Prentice-Hall.
- Арбиб, Зейгер (Arbib M. A., Zeiger H. P.)
 [1968] An automaton-theoretic approach to linear systems, preprints of IFAC Symposium, Sydney, Australia (Institution of Engineers, Australia), pp. 91—97.
- Атанс (Athans M.)
 [1966] On the uniqueness of the extremal controls for a class of minimum fuel systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-11 : 660—669.
- Атанс, Фалб (Athans M., Falb P. L.)
 [1966] Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill. (Есть русский перевод: Оптимальное управление, теория и применение, «Энергия», М., 1968.)
- Балакришнан, Нейштадт (Balakrishnan A. V., Neustadt L. W. (eds.))
 [1964] Computing Methods in Optimization Problems, Academic Press.
- Блум (Blum E. K.)
 [1964] Minimization of functionals with equality constraints, *SIAM J. Contr.*, 3 : 299—316.
- Болтянский В. Г.
 [1964] Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования, *Изв. АН СССР, Серия математическая*, 28 : (3), 481—514.
- Брайсон, Денхэм (Bryson A. E., Denham W. F.)
 [1962] A steepest-ascent method for solving optimum programming problems, *J. Appl. Mech. (Trans. ASME, Ser. E)*, 29 : 247—257.

- Брэкуэлл, Спейер, Брайсон (Breakwell J. V., Speyer J. L., Bryson A. E.)
 [1963] Optimization and control of nonlinear systems using the second variation, *SIAM J. Contr.*, 1: 193—223.
- Бурбаки (Bourbaki N.)
 [1962] *Éléments de Mathématique; Livre II; Algèbre, chap. 2: Algèbre linéaire* (3d ed.), Actualités Scientifiques et Industrielles № 1236, Hermann. (Есть русский перевод: Алгебра. Алгебраические структуры, линейные и полилинейные алгебры, Физматгиз, М., 1962.)
 [1964] *Ibid.*, chap 7: Modules sur les anneaux principaux (2d ed.), Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1179, Hermann. (Есть русский перевод: Алгебра. Модули, кольца, формы. «Наука», М., 1966.)
- Бушав (Bushaw D.)
 [1963] Dynamical polysystems and optimization, *Contr. to Diff. Equations*, 2: 361—365.
- Ван Дайн (Van Dine C. P.)
 [1965] An application of Newton's method to the finite-difference solution of nonlinear boundary-value systems, United Aircraft Res. Lab. Rept. UAR-D37.
- Ван дер Варден (Van der Waerden B. L.)
 [1931] *Moderne Algebra*, 2 vols., Springer. (Есть русский перевод: Современная алгебра, т. 1, 2. Гостехиздат, 1934.)
- Вейсс, Калман (Weiss L., Kalman R. E.)
 [1965] Contributions to linear system theory, *Intern. J. Engr. Sci.*, 3: 141—171.
- Витценхаузен (Witsenhausen H.)
 [1965] Some iterative methods using partial order for solution of nonlinear boundary-value problems, MIT Lincoln Laboratory Technical Note 1965-18.
- Гамкрелидзе Р. В.
 [1965] On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control, *SIAM J. Contr.*, 3: 106—108.
- Гантмахер Ф. Р.
 [1953] Теория матриц, ГИТТЛ; изд. 2, «Наука», 1966, изд. 3, 1967.
- Гинзбург (Ginsburg A.)
 [1966] Six lectures on algebraic theory of automata, Center for the Study of Information Processing, Carnegie Institute of Technology.
- Гинзбург (Ginsburg S.)
 [1962] *An Introduction to Mathematical Machine Theory*, Addison-Wesley.
- Греб (Greub W. H.)
 [1967] *Linear Algebra*, 3d ed., Springer.
- Дакуна, Полак (Dacunha N., Polak E.)
 [1967] Constrained minimization under vector-valued criteria in finite-dimensional spaces, *J. Math. Anal. and Appl.*, 19: 103—124.
- Данфорд, Шварц (Dunford N., Schwartz J. T.)
 [1958] *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience. (Есть русский перевод: Линейные операторы, ч. 1. Общая теория, ИЛ, М., 1962.)
- Даффин, Хазони (Duffin R. J., Hazony D.)
 [1963] The degree of a rational matrix function, *SIAM J.*, 11: 645—658.

- Денхэм (Denham W. F.)
[1963] Steepest-ascent solution of optimal programming problems, Raytheon Report, BR-2393.
- Джекобсон (Jacobson N.)
[1953] Lectures in Abstract Algebra, v. II: Linear Algebra, Van Nostrand.
- Джонсон (Johnson C. D.)
[1965] Singular solutions in problems of optimal control, in *Advances in Control Systems: Theory and Applications*, v. II, C. T. Leondes (ed.), Academic Press.
- Джонсон, Гибсон (Johnson C. D., Gibson J. E.)
[1963] Singular solutions in problems of optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-8: 4—14.
- Дуб (Doob J. L.)
[1953] Stochastic Processes, Wiley. (Есть русский перевод: Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.)
- Дэй, Уоллас (Day E. M., Wallace A. D.)
[1967] Multiplicaton induced in the state space of an act, *Math. System Theory*, 1: 305—314.
- Дьедонне (Dieudonné J.)
[1960] Foundations of Modern Analysis, Academic Press. (Есть русский перевод: Основы современного анализа, М., 1964.)
- Задэ (Zadeh L. A.)
[1952] A general theory of linear signal transmission systems, *J. Franklin Inst.*, 253: 293—312.
- Задэ, Дезоер (Zadeh L. A., Desoer C. A.)
[1963] Linear System Theory, McGraw-Hill. (Готовится русский перевод: Теория линейных систем, «Наука».)
- Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
[1958] Commutative Algebra, v. I, Van Nostrand. (Есть русский перевод: Коммутативная алгебра, т. I, ИЛ, М., 1963.)
- Зеeman (Zeeman E. C.)
[1962] The topology of the brain and visual perception, in *The Topology of 3-Manifolds*, M. K. Fort (ed.), 240—256.
- Зейгер (Zeiger H. P.)
[1965] Cascade synthesis of finite automata, Proc. Sixth Ann. Conf. Switching Theory and Automata, IEEE.
[1967a] Yet another proof of the cascade decomposition theorem for finite automata, *Math. System Theory*, 1: 225—228.
[1967b] Ho's algorithm, commutative diagrams, and the uniqueness of minimal linear systems, *Inf. and Control*, 11: 71—79.
[1968] Cascade decomposition of automata using covers, chap. 4 in [Arbib, 1968a].
- Итон (Eaton J. H.)
[1962] An iterative solution to time-optimal control, *J. Math. Anal. Appl.*, 5: 329—344.
- Калаба (Kalaba R.)
[1959] On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence, *J. Math. Mech.*, 8: 519—574.
- Калман (Kalman R. E.)
[1958] Design of a self-optimizing control system, *Trans. ASME*, 80: 468—478.

- [1960a] Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5: 102—119.
- [1960b] On the general theory of control systems, Proc. 1st IFAC Congress, Moscow; Butterworths, London.
- [1962a] Canonical structure of linear dynamical systems, *Proc. Nat. Acad. of Sci. (USA)*, 48: 596—600.
- [1962b] On the stability of time-varying linear systems, *Trans. IRE PGCT*, 9: 420—422.
- [1963a] The theory of optimal control and the calculus of variations, chap. 16 in Proc. of Conference on Mathematical Optimization Techniques (Santa Monica, 1960), R. Bellman (ed.), University of California Press.
- [1963b] New methods in Wiener filtering theory, Proc. 1st Symp. on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, Purdue University, November 1960, pp. 270—388, Wiley. (Сокращенный вариант из RIAS Technical Report 61-1.)
- [1963c] Mathematical description of linear dynamical systems, *SIAM J. Contr.*, 1: 152—192.
- [1963d] Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control, *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 49: 201—205.
- [1964] When is a linear control system optimal? *J. Basic Engr. (Trans. ASME, Ser. D)*, 86D: 51—60. (Есть русский перевод: Когда линейная система управления является оптимальной? *Труды американского общества инженеров-механиков, серия D*, № 1 (1964), 69.)
- [1965a] Irreducible realizations and the degree of a rational matrix, *SIAM J. Contr.*, 13: 520—544.
- [1965b] Algebraic structure of linear dynamical systems. I. The module of Σ , *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 54: 1503—1508.
- [1966a] Toward a theory of difficulty of computation in optimal control, Proc. 4th IBM Scientific Computing Symposium, pp. 25—43.
- [1966b] On structural properties of linear, constant, multivariable systems, Proc. 3rd IFAC Congress, London, to appear.
- [1967] Algebraic aspects of the theory of dynamical systems, in *Differential Equations and Dynamical Systems*, J. K. Hale and J. P. LaSalle (eds.), pp. 133—146, Academic Press.
- [1969] Lectures on controllability and observability, C. I. M. E. Summer School 1968, Edizioni Cremonese, Roma.
- [1970] On partial realizations of a linear input/output map, Guillemin Anniversary Volume, Holt, Winston and Rinehart.

Калман, Бюси (Kalman R. E., Bucy R. S.)

- [1961] New results in linear prediction and filtering theory, *J. Basic Engr. (Trans. ASME, Ser. D)*, 83D: 95—100. (Есть русский перевод: Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания, *Труды американского общества инженеров-механиков, серия D*, № 1 (1961), 123.)

Калман, Хо, Нарендра (Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K.)

- [1963] Controllability of linear dynamical systems, *Contr. to Diff. Equations*, 1: 189—213.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.

- [1959] Функциональный анализ в нормированных пространствах, «Физматгиз», М.

Келли (Kelley H. J.)

- [1960] Gradient theory of optimal flight paths, *ARS J.*, 30: 947—953.
- [1962] Method of gradients, in *Optimization Techniques*, G. Leitman (ed.), Academic Press.

Кенон, Каллум, Полак (Canon M., Cullum C., Polak E.)

- [1967] Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces, *SIAM J. Contr.*, 4: 528—547.

- Клиффорд, Престон (Clifford A. H., Preston G. B.)
[1961] *The Algebraic Theory of Semigroups*, v. I, Mathematical Surveys, № 7, Amer. Math. Soc. (Готовится русский перевод т. т. 1 и 2.)
- Коддингтон, Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)
[1955] *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill) (Есть русский перевод: Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1968.)
- Коллатц (Collatz L.)
[1964] *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer. (Есть русский перевод: Функциональный анализ и вычислительная математика, «Мир», М., 1969.)
- Кранц, Сарачик (Kranz G. M., Sarachik P. E.)
[1963] An application of functional analysis to the optimum control problem, *J. Basic Eng. (Trans. ASME, Ser. D)*, 85D: 143—150. (Есть русский перевод: Применение функционального анализа к задаче оптимального управления, *Труды американского общества инженеров-механиков, серия D*, № 2 (1963), 10.)
- Крон, Роудз (Krohn K. B., Rhodes J. L.)
[1965] Algebraic theory of machines. I. The main decomposition theorem, *Trans. Am. Math. Soc.*, 116: 450—464.
- Крон, Роудз, Тилсон (Krohn K. B., Rhodes J. L., Tilson B.)
[1968] The prime decomposition theorem of the algebraic theory of machines, chap. 5 of [Arbib, 1968a].
- Куликовский (Kulikowski R.)
[1959] On optimum control with constraints, *Bull. Polish Acad. Sci., Ser. Tech. Sci.*, 7: 385—394.
- Курант (Courant R. (revised by Moser J.))
[1962] *Calculus of Variations (lecture notes)*, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences.
- Курош А. Г.
[1953] Теория групп, изд. 2, ГИТТЛ; изд. 3, «Наука», 1967.
- Кэртис, Рейнер (Curtis C. W., Reiner I.)
[1962] *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience-Wiley. (Есть русский перевод: Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.)
- Ленг (Lang S.)
[1965] *Algebra*, Addison-Wesley. (Есть русский перевод: Алгебра, «Мир», М., 1968.)
- Ли, Маркус (Lee E. B., Markus L.)
[1961] Optimal control for nonlinear processes, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 8: 36—58. (Есть русский перевод: Кибернетический сборник, новая серия, Вып. 2, «Мир», 1966.)
- Люенбергер (Luenberger D. G.)
[1964] Observing the state of a linear system, *IEEE Trans. Military Electronics*, MIL-8: 74—80.
- Мак-Гилл, Кеннет (McGill R., Kenneth P.)
[1963] A convergence theorem on the iterative solution of nonlinear two-point boundary-value systems, XIV IAF Congress, Paris.

- Мак-Калох, Питтс (McCulloch W. S., Pitts W. H.)
[1943] A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bull. Math. Biophys.*, 5: 115—133.
- Мак-Лейн, Биркгоф (MacLane S., Birkhoff G.)
[1967] *Algebra*, Macmillan.
- Мак-Миллан (McMillan B.)
[1952] Introduction to formal realizability theory, *Bell System Tech. J.*, 31: 217—279, 541—600.
- Мур (Moore E. F.)
[1956] Gedanken-experiments on sequential machines, in *Automata Studies*, C. E. Shannon and J. McCarthy (eds.), pp. 129—153, Princeton University Press. (Есть русский перевод: сборник «Автоматы», ИЛ, 1956.)
- Мур (ред.) (Moore E. F. (ed.))
[1963] *Sequential Machines — Selected Papers*, Addison-Wesley.
- Нейштадт (Neustadt L. W.)
[1960] Synthesizing time-optimal control systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1: 484—493.
[1965] Optimal control problems as extremal problems in a Banach space, *Proc. of the Symposium on System Theory*, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 215—224.
[1966] An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General Theory, *SIAM J. Contr.*, 4: 505—528.
[1967] An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. II. Applications, *SIAM J. Contr.*, 5: 90—137.
- Немыцкий В. В., Степанов В. В.
[1949] *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.
- Нерод (Nerode A.)
[1958] Linear automaton transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9: 541—544.
- Пешон (Peschon J. (ed.))
[1963] *Disciplines and Techniques of Modern Systems Control*, Ginn-Blaisdell.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
[1961] *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М.
- Рабин, Скотт (Rabin M. O., Scott D.)
[1959] Finite automata and their decision problems, *IBM J. Res. Develop.*, 3: 114—125. (Есть русский перевод: Кибернетический сборник, Вып. 4, ИЛ, 1962.)
- Роксин (Roxin E.)
[1962] The existence of optimal controls, *Mich. Math. J.*, 9: 109—119.
[1965] On generalized dynamical systems defined by contingent equations, *J. Diff. Equations*, 1: 188—205.
- Роте (Rothe E. H.)
[1948] Gradient mappings and extrema in Banach spaces, *Duke Math. J.*, 15: 421—431.
- Сильверман, Андерсон (Silverman L. M., Anderson B. D. O.)
[1968] Controllability, observability, and stability of linear systems, *SIAM J. Contr.*, 6: 121—130.
- Тодд (Todd J. (ed.))
[1962] *Survey of Numerical Analysis*, McGraw-Hill.

- Уаймор (Wymore A. W.)
[1967] A Mathematical Theory of Systems Engineering: The Elements, Wiley.
- Уиллис, Брокетт (Willis B. H., Brockett R. W.)
[1965] The frequency domain solution of regulator problems, 1965 JACC, Troy, New York, 228—235.
- Уиндекнехт (Windeknecht T. G.)
[1967] Unpublished class notes on General Systems Theory, Case-Western Reserve University.
- Фалб (Falb P. L.)
[1964] Infinite-dimensional control problems I: On the closure of the set of attainable states for linear systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 9: 12—22.
[1967] Infinite-dimensional filtering: the Kalman-Bucy filter in Hilbert space, *Information and Control*, 11: 102—137.
[1968a] Stochastic differential equations in Hilbert space, to appear.
[1968b] Direct Methods in Optimal Control, McGraw-Hill.
- Фалб, Дейонг (Falb P. L., Dejong J. L.)
[1968] On Successive Approximation Methods in Control and Oscillation Theory, Academic Press.
- Фалб, Клейнман (Falb P. L., Kleinman D. L.)
[1966] Remarks on the infinite-dimensional Riccati equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-11: 534—537.
- Фалб, Полак (Falb P. L., Polak E.)
[1968] Conditions for optimality, in Systems Theory, L. Zadeh and E. Polak (eds.), McGraw-Hill.
- Форр (Faurge P.)
[1965] EM 270a term paper, Stanford University, December, 1965.
- Фримэн (Freeman H.)
[1965] Discrete-Time Systems, Wiley.
- Фробениус (Frobenius G.)
[1881] Über Relationen zwischen Näherungsbrüchen von Potenzreihen, *J. reine u. angew. Math.*, 90: 1—17.
- Фрэзер, Дункан, Коллар (Frazer R. A., Duncan W. J., Col-lar A. R.)
[1946] Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations, 3d ed., Cambridge University Press. (Есть русский перевод: Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, М., 1950.)
- Халкин (Halkin H.)
[1963a] On the necessary condition for optimal control of nonlinear systems, *J. Anal. Math. (Jerusalem)*, 12: 1—82.
[1963b] The principle of optimal evolution, in Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, J. P. LaSalle and S. Lefschetz (eds.), Academic Press.
[1964] Topological aspects of optimal control of dynamical polysystems, *Contr. Diff. Equations*, 3: 377—385.
[1967] An abstract framework for the theory of process optimization, *Bull. Am. Math. Soc.*
- Халмош (Halmos P. R.)
[1958] Finite-Dimensional Vector Spaces, 2d ed., Van Nostrand. (Есть русский перевод: Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.)

- Хартманис, Стернз (Hartmanis J., Stearns R. E.)
[1966] The Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Prentice-Hall.
- Херстейн (Herstein I. N.)
[1964] Topics in Algebra, Ginn-Blaisdell.
- Хо (Ho B. L.)
[1966] An effective construction of realizations from input/output descriptions, doctoral dissertation, Stanford University.
- Хо, Калман (Ho B. L., Kalman R. E.)
[1965—1966] Effective construction of linear state-variable models from input/output functions, Proc. Third Allerton Conf., pp. 449—459; *Regelungstechnik*, 14: 545—548.
[1970] The realization of linear, constant input/output maps. I. Complete realizations, *SIAM J. Contr.*, to appear.
- Холл (Hall M., Jr.)
[1959] The Theory of Groups, McMillan. (Есть русский перевод: Теория групп, ИЛ, М., 1962.)
- Ху Сы-цзян (Hu S. T.)
[1965] Elements of Modern Algebra, Holden-Day.
- Юла (Youla D. C.)
[1966] The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weighting patterns, *SIAM J. Appl. Math.*, 14: 527—549.
- Юла, Тиши (Youla D. C., Tissi P.)
[1966] n -port synthesis via reactance extraction. Part I, IEEE Intern. Convention Record.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акилов Г. П. 112, 164, 166—168, 171, 173
 Альберт (Albert A. A.) 347, 376
 Андерсон (Anderson B. D. O.) 358
 Андрэ (Andr  e R. V.) 334, 384
 Анликер (Anliker M.) 8
 Арбиб (Arbib M. A.) 5, 6, 8, 9, 11, 23,
 185, 196, 210, 231, 232, 235, 245, 257,
 296
 Атанс (Athans M.) 94, 108, 139, 142,
 149, 162, 163, 164, 180

Балакришнан (Balakrishnan A. V.) 173
 Беллман (Bellman R.) 58, 63
 Бертрам (Bertram J. E.) 62
 Биркгоф (Birkhoff G.) 391
 Блатт (Blatt J.) 8
 Блюм (Blum E. K.) 166, 171
 Болтянский В. Г. 94, 137, 139, 141, 158
 Брайсон (Bryson A. E.) 166, 171, 173
 Брокетт (Brockett R. W.) 97
 Брэкуэлл (Breakwell J. V.) 166, 385
 Бурбаки (Bourbaki N.) 19, 237, 267,
 304, 306, 314
 Бушав (Bushaw D.) 23, 166
 Бэсс (Bass R. W.) 62, 69
 Бюси (Bucy R. S.) 26, 72, 110, 129, 130

Ван Дайн (Van Dine C. P.) 164
 Ван дер Варден (Van der Waerden B. L.) 237, 267, 306
 Вейсс (Weiss L.) 23, 74, 355, 361, 362,
 367
 Вербеek (Verbeek L. A. M.) 210
 Весткотт (Westcott J.) 8
 Витценхаузен (Witsenhausen H.) 89

Гамкрелидзе Р. В. 137, 139, 141, 158
 Гантмахер Ф. Р. 48, 315, 375
 Гибсон (Gibson J. E.) 163
 Гинзбург (Ginsburg A.) 262, 263
 Гинзбург (Ginsburg S.) 201
 Греб (Greub W. H.) 267

Дакуна (Dacynha N.) 151, 152
 Данфорд (Dunford N.) 103, 111, 112,
 115—117, 120, 124, 129, 134, 135,
 149, 152

Даффин (Duffin R. J.) 323
 Дезоер (Desoer C. A.) 22, 23, 38, 194, 195
 Дейонг (Dejong J. L.) 168, 174
 Денхэм (Denham W. F.) 166, 171, 173
 Джекобсон (Jacobson N.) 55, 304, 322,
 323
 Джильберт (Gilbert E.) 8
 Джонсон (Johnson C. D.) 163
 Дуб (Doob J. L.) 111, 114, 117, 118,
 124, 129
 Дункан (Duncan W. J.) 376
 Дьедонне (Dieudonn   J.) 86, 92, 102,
 103, 107, 118, 119, 152, 153, 157
 Дэй (Day E. M.) 303, 386

Зад   (Zadeh L. A.) 22, 23, 38, 194, 195,
 367

Зарисский (Zariski O.) 370
 Зеeman (Zeeman E. C.) 204
 Зейгер (Zeiger H. P.) 9, 196, 235, 256,
 257, 260, 262, 288, 292, 326, 327, 332,
 352

Итон (Eaton J. H.) 164

Калаба (Kalaba R.) 166
 Каллум (Cullum C.) 27, 131, 137, 149, 150
 Калман (Kalman R. E.) 5, 6, 8, 9, 11,
 23, 25, 26, 31, 34, 44, 51, 57, 60—64,
 66, 72, 74, 97, 99, 108, 110, 130, 203,
 266—268, 286, 287, 295, 296, 315—
 317, 320, 323, 325—327, 332, 344, 345,
 355, 358—362, 367, 368, 376, 380
 Канторович Л. В. 112, 164, 166—168,
 171, 173

Келли (Kelley H. J.) 164, 166, 171
 Кеннет (Kenneth P.) 166, 174
 Кенон (Canon M.) 27, 131, 137, 149, 150
 Клейнман (Kleinman D. L.) 8, 108
 Клиффорд (Clifford A. H.) 211, 247
 Коддингтон (Coddington E. A.) 46, 47
 Коллар (Collar A. R.) 376
 Коллатц (Collatz L.) 89, 166, 168
 Коши (Cauchy A.) 379
 Кранц (Kranz G. M.) 89
 Крон (Krohn K. B.) 30, 232, 235, 245,
 254—256
 Куликовский (Kulikowski R.) 89
 Курант (Courant R.) 27, 165, 175, 177

Курош А. Г. 248
Кушнер (Kushner H.) 8
Кэртис (Curtis C. W.) 304

Левинсон (Levinson N.) 46, 47
Ленг (Lang S.) 304, 306, 370
Ли (Lee E. B.) 164
Люенбергер (Luenberger D. G.) 73, 74

Мак-Джилл (McGill R.) 166, 174
Мак-Калох (McCulloch W. C.) 391
Мак-Лейн (MacLane S.) 391
Мак-Миллан (McMillan B.) 320, 323
Маркус (Markus L.) 164
Мищенко Е. Ф. 137, 139, 141, 158
Мозер (Moser J.) 27
Мур (Moore E. F.) 391

Нарендра (Narendra K. S.) 44, 51, 57,
60
Нейштадт (Neustadt L. W.) 27, 89,
131, 137, 149—151, 158, 164, 173
Немыцкий В. В. 22
Нерод (Nerode A.) 391
Нолан (Nolan K.) 9
Ньюком (Newcomb M.) 9

Омура (Omura K.) 9

Парсонс (Parsons J.) 9
Пешон (Peschon J.) 391
Понтрягин Л. С. 137, 139, 141, 157, 158

Рабин (Rabin M. O.) 196
Рейнер (Reiner I.) 304
Роксин (Roxin E.) 23, 146, 148
Роте (Rothe E. H.) 146, 177
Роудз (Rhodes J. L.) 232, 235, 245,
254—256

Самюэль (Samuel P.) 370
Сарачик (Sarachik P. E.) 89
Свенсон (Swanson R.) 8
Сильверман (Silverman L. M.) 358

Скотт (Scott D.) 196
Спейер (Speyer J. L.) 166
Степанов В. В. 22
Стирнз (Stearns R. E.) 257

Тилсон (Tilson B. L.) 235
Тиши (Tissi P.) 325
Тодд (Todd J.) 89

Уаймор (Wymore A. W.) 23
Уиллис (Willes B. H.) 97
Уиндекнехт (Windeknecht T. G.) 22, 23
Уоллес (Wallace A. D.) 303

Фалб (Falb P. L.) 5, 6, 8, 9, 11, 26,
82, 89, 94, 108, 111, 116, 120, 123,
124, 126, 129, 130, 139, 142, 146, 149,
162—164, 168, 174, 180, 184, 384
Форр (Faurre P.) 9, 203, 324
Фриман (Freeman H.) 31, 310
Фробениус (Frobenius G.) 380
Фрэзер (Frazer R. A.) 376

Хазони (Hazon D.) 323
Халкин (Halkin H.) 23, 27, 131, 137,
141, 146, 149—151, 158
Халмош (Halmos P. R.) 51
Хартманис (Hartmanis J.) 257
Херстейн (Herstein N.) 369
Хо (Ho B. L.) 44, 51, 57, 60, 267, 325—
345, 368, 380
Холл (Hall M.) 352
Ху Сы-цзян (Hu S. T.) 211, 213, 369

Шварц (Schwartz J. T.) 103, 111, 112,
115—117, 120, 124, 129, 134, 135,
149, 152
Шюттенберже (Schutzenberger M. P.)
187

Юла (Youla D. C.) 296, 325, 362, 380

Якоби (Jacobi K. G. J.) 379

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомат 27, 28, 217
— естественно толерантный 208
— конечный 17, 187, 218
— s -неприводимый 234
— приведенный 28, 218
— тождественно-возвратный 30, 233
— толерантный 204—206
— — внешне 207
Автоматы, слабо эквивалентные 29
Аддитивность систем 191
Аксиомы дистрибутивности 369
Алгебраическая эквивалентность систем 357
— — — нормированная 358
— — — стационарная 357
Алгоритм Б. Л. Хо 325
— вычисления инвариантных множителей 375
Алфавит входной 217
— выходной 217
Аннулятор множества 297
Асимптотический дифференциатор 71
Базис модуля 372
Блок разбиения 215
Векторное пространство 370
Весовая характеристика 361
Возмущение управления временное 142
— — пространственное 142
— — фундаментальное 142
Гомоморфизм 213
— автоматов 224
— моноидов 214
Группа 211
— абелева 212, 237
— PR -автоматов 235
— простая 238
Декомпозиция конечных автоматов 231
— PR -автоматов 252
Делимость 211
Делители нуля 369
Дискретные преобразования Лапласа 275
Дуальность систем 191
Единица кольца 369
— левая 239
— правая 239
Задача идентификации 65
— наблюдения 65
— оптимального управления 209
— регулирования 40
— — в пространстве выходных величин 99
— — — состояний 99
— управления абстрактная 84
— — стандартная 86, 87
Закон управления 37, 58
Идеал двусторонний 373
— левый 239, 372
— правый 239, 373
— собственный 239
Идемпотент 239
Изоморфизм систем 271
Импульсная реакция 273
— характеристика 194
Инварианты матриц 314
— модуля 304
— эндоморфизма 306
Каноническое представление матриц 56
— — — идентификационное 70
Качество конечного состояния 87
— траектории перехода 87
Качество управления 84
Класс идентификации 65
— наблюдения 65
— начальный 262
— эквивалентности 215
— — Майхилла 348
— — Нерода 281
Кольцо главных идеалов 373
— классов вычетов 373, 374
— коммутативное 369
— разностей 373
— целостности 369
Конструирование систем управления 159
Конструкция регуляторов 74
Косостояние системы 136
Котраектория системы 136
Коэффициент затухания 79
— корреляции 113
Критерий реализуемости 340
— существования 256
Матрица ганкелева 326
— переходная 41

- Метод градиентный 167, 169
 — Ньютона 167
 — Ньютона — Рафсона 171
 — последовательных приближений 168, 173
 Многочлен модуля, минимальный 297
 — неприводимый 375
 Множество входных воздействий 13
 — выходных величин 13
 — допустимых управлений 84
 — достижимости 146
 — конечное 216
 — моментов времени 13
 — несчетное 216
 — состояний 13
 — счетное 216
 — целевое 84
 — частично упорядоченное 215
 Модуль 285, 371
 — конечный 372
 — с кручением 297
 — циклический 297
 Момент достижения 84
 Моноид 212, 213, 223
 Мощность множества 216, 217

 Наблюдаемость систем 198
 Необходимые условия оптимальности 131, 150
 Нуль левый 239
 — правый 239

 Область главных идеалов 373
 Объект управления 24
 — — линейный 24
 — — стационарный 24
 Оператор сдвига 16, 274
 Операция ассоциативная 211, 242
 — коммутативная 212
 — неассоциативная 212
 — сложения 212
 — умножения 212
 Отношение бинарное 214
 — конгруэнтности 216
 — с конечным индексом 216
 — эквивалентности 215, 218
 — — Майхилла 221
 — — Нерода 220, 280
 Отображение «антипричинное» 355
 — биективное 214
 — вход — выход 20, 272
 — — абстрактное 362
 — R -гомеоморфное 371
 — ошибок 166
 — переходное 40, 41
 — причинное 354
 — — импульсное 355

 Отображение сюръективное 214
 — цикличное 48

 Поверхность качества 95
 Подгруппа нормальная 236
 Подмодуль 373
 Подполугруппа 213
 Покрытие автомата 258
 Поле 370
 Полугруппа 185, 212
 — неприводимая 242
 — расширенная 258
 — системы 349
 Последовательность простых чисел 347
 — Фибоначчи 347
 Принцип дуальности управления 64
 — максимума Понтрягина 137, 141, 158
 Произведение полупрямое 242
 — узловое 244
 Производящая функция системы 86
 Пространство Банаха 17
 — событий 14
 — фазовое 14
 Процесс винеровский 114
 Процесс с ортогональными приращениями 113
 — — стационарными приращениями 113
 — стохастический 111

 Разбиение множества 215
 Реализация 7, 21, 274, 292
 — алгоритма Б. Л. Хо 330
 — весовой характеристики 361
 — — — приведенная 361
 — каноническая 267, 287, 291, 293
 — минимальная 267, 291
 — нестационарных отображений 353
 — причинного отображения 356
 — частичная 341
 — — минимальная 342
 Реализуемое подмножество 220
 Регулятор 37
 Ряд композиционный 239
 — нормальный 238

 Система 11
 — аддитивная 191
 — асимптотической оценки 69
 — воспроизводящая 324
 — восстанавливающая 197
 — гамильтонова 140
 — гладкая 19, 22, 85
 — динамическая 11, 13, 20
 — дуальная 196

- Система идентифицируемая 68
- каноническая 140
 - классическая 22
 - конечномерная 17
 - линейная 18, 97
 - наблюдаемая 68, 202
 - неискажающая 324
 - обратимая 15, 22
 - полностью достижимая 43
 - постоянная 15, 16
 - приведенная 186, 189
 - свободная 15
 - с дискретным временем 16
 - с непрерывным временем 16
 - сильно связанная 186
 - «состояние — выход» 189
 - стационарная 15, 16
 - — линейная 46, 47
 - строго устойчивая 110
 - управляемая 43, 199
- Системы изоморфные 271
- примитивно эквивалентные 201
 - сопряженные 194, 195
- Скалярное умножение 370
- Случайная величина 111
- Событие достижимое 42, 146
- управляемое 43
- Соединение автоматов каскадное 29, 231
- — параллельное 29, 231
 - — последовательное 29, 231
- Сопряженная траектория 136
- Состояние системы достижимое 186
- — нулевое 190
- Степень дробно-рациональной матрицы 323
- многочлена 370
- Структура конечных $K[z]$ -модулей 303
- полугруппы 349
- Теорема единственности, антипричинный случай 367
- — причинный случай 366
 - — вторая 366
 - — первая 358
 - Жордана — Гёльдера 239, 250
 - Крона — Роудза 235
 - об инвариантах 375
 - о гомоморфизмах 238
 - представлении 298, 308
 - реализации 290, 319
 - структурная для конечных модулей 304
- Теорема существования 145
- фундаментальная теории линейных систем 281
- Теория автоматов 185
- Гамильтона — Якоби 90
 - линейных систем алгебраическая 31, 266
 - оптимального управления 24, 82
 - регулирования линейных объектов 34
 - управления, элементарная 23, 34
- Толерантное произведение 209
- пространство 204
- Толерантность 204
- Триггер 233
- Управление минимальное 92
- H -минимальное 160
 - оптимальное 88
- Управляемость систем 198
- Уравнение Винера — Хопфа 121
- Уравнение возмущенного движения 133, 169
- Гамильтона — Якоби 92
 - Риккати 101
- Факторгруппа 237
- Факторизация каноническая 289
- Факторкольцо 373
- Факторы 238
- Фильтр Калмана — Бюси 110
- Формальный многочлен 348
- степенной ряд 370
- Функционал качества квадратичный 98
- Функция, выходная одношаговая 28, 217
- s -интегрируемая 118
 - передаточная 306, 308
 - переходная одношаговая 28, 217
 - характеристическая 220
- Эквивалентные состояния 186, 218
- системы 186, 189
- Эксперимент множественный 200
- — ветвящийся 200
 - простой 200
 - — ветвящийся 200
- Элемент оптимальный 149, 151
- Элементы 234
- Эпиморфизм канонический 237

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7

ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

1 В помощь читателю	11
1.1. Системы и состояния	11
1.2. Элементарная теория управления	23
1.3. Теория оптимального управления	24
1.4. Автоматы	27
1.5. Алгебраическая теория линейных систем	31

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ С СОВРЕМЕННОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

2 Теория регулирования линейных объектов	34
2.1. Постановка задачи управления	35
2.2. Гладкие линейные системы	40
2.3. Стационарные линейные системы	46
2.4. Замена координат и канонические формы	53
2.5. Понятие закона управления	58
2.6. Определение состояний	63
2.7. Конструкция регуляторов	74

ВТОРАЯ ЧАСТЬ. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3 Основы теории оптимального управления	82
3.1. Абстрактная задача управления	83
3.2. Гладкие динамические системы	85
3.3. Стандартная задача управления	86
3.4. Теория Гамильтона — Якоби	90
3.5. Линейные системы с квадратичным критерием качества	97
3.6. Фильтр Калмана — Бюси	110
4. Необходимые условия оптимальности	131
4.1. Необходимые условия оптимальности	131
4.2. Принцип максимума Понтрягина	137
4.3. Теорема существования	145
4.4. Замечания о необходимых условиях оптимальности в задачах управления	148

Приложение к главе 4

4.A. Необходимые условия оптимальности	150
5 Конструирование систем управления	159
5.1. Один простой пример	159
5.2. Конструирование систем управления с помощью принципа Понтрягина	163
5.3. Численные методы теории управления; общие замечания	164
5.4. Вычислительные методы теории управления; косвенные методы	168
5.5. Вычислительные методы теории управления; прямые методы	175

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ. ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

6 Теория автоматов с точки зрения теории управления	185
6.1. Полугруппы	185
6.2. Аддитивность и дуальность	190
6.3. Управляемость и наблюдаемость	198
6.4. Толерантные автоматы	204
7 Основные понятия теории автоматов и теории полугрупп	211
7.1. Полугруппы и конгруэнтность	211
7.2. Автоматы, приведенные формы и отношения эквивалентности	217
7.3. Автоматы и полугруппы	224
8 Декомпозиция конечных автоматов без петель	231
8.1. Общий взгляд на теоремы декомпозиции	231
8.2. Некоторые сведения из теории групп и полугрупп	236
8.3. Результаты о неприводимости	241
8.4. Доказательство теоремы Жордана — Гёльдера	248
9 Доказательство теорем о декомпозиции конечных автоматов	252
9.1. Декомпозиция PR -автоматов	252
9.2. Доказательство теоремы о декомпозиции с помощью теории полугрупп	254
9.3. Декомпозиции с помощью «покрытий»	257
9.4. Декомпозиция на PR -автоматы	260

ЧЕТВЕРТАЯ ЧАСТЬ. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

10 Алгебраическая теория линейных систем	266
10.1. Основные определения	268
10.2. Отображение вход — выход для линейной системы	272
10.3. Структура $K[z]$ -модулей в Ω и Γ	275
10.4. Модули и эквивалентность Нерода	279
10.5. Пространство состояний как модуль	282
10.6. Теория абстрактной реализации	286
10.7. Циклические модули	296
10.8. Структура конечных $K[z]$ -модулей	303
10.9. Передаточные функции	306
10.10. Применения алгоритма вычисления матричных инвариантов	311
10.11. Алгоритм Б. Л. Хо	325
10.12. Полугруппы и простые линейной конечномерной системы	347
10.13. Реализация нестационарных отображений вход — выход с непрерывным временем	353
Приложения к главе 10	369
10.А. Обзор теории модулей (369). 10.В. Частичная реализация отображения вход — выход (в скалярном случае) (376). 10.С. Первое доказательство теоремы единственности канонических реализаций (380). 10.Д. Указатель обозначений	383
Литература	386
Именной указатель	394
Предметный указатель	396

Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб

ОЧЕРКИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ СИСТЕМ

